

Intervalles de \mathbb{R}

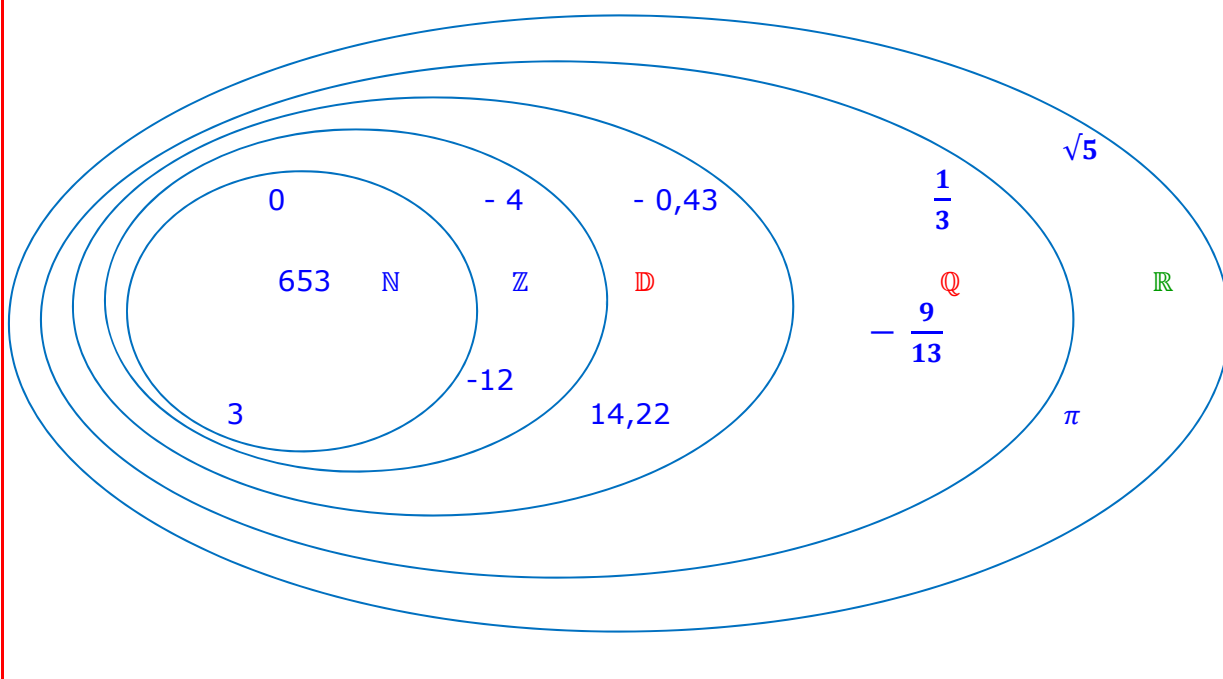
On rappelle que l'ensemble des nombres réels est noté \mathbb{R} , qu'il contient tous les nombres connus et étudiés en classe de seconde, qu'il est infini et totalement ordonné, ce qui signifie qu'étant donné deux nombres a et b quelconques, on peut toujours écrire $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$. On peut représenter géométriquement l'ensemble des nombres réels par une droite orientée munie d'une origine, correspondant au nombre 0, et une unité de longueur, correspondant au nombre 1.

I) Les ensembles de nombres

1) Définitions

- L'ensemble des nombres **entiers naturels** est noté \mathbb{N} .
 - $\mathbb{N} = \{ \dots 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots \}$
- L'ensemble des nombres **entiers relatifs** est noté \mathbb{Z} .
 - $\mathbb{Z} = \{ \dots -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots \}$
- L'ensemble des nombres **décimaux** est noté \mathbb{D}
 - \mathbb{D} est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Ils peuvent s'écrire comme une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10
- L'ensemble des nombres **rationnels** est noté \mathbb{Q} .
 - \mathbb{Q} est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a entier relatif et b entier relatif non nul.
- L'ensemble des nombres **réels** est noté \mathbb{R}
 \mathbb{R} est l'ensemble de tous les nombres utilisés en classe de seconde.

Relation entre ces ensembles :



On écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ pour exprimer que chaque ensemble de nombres est **inclus** dans le précédent (c'est à dire que tous les nombres d'un ensemble appartiennent aussi aux ensembles situés à droite dans la relation)

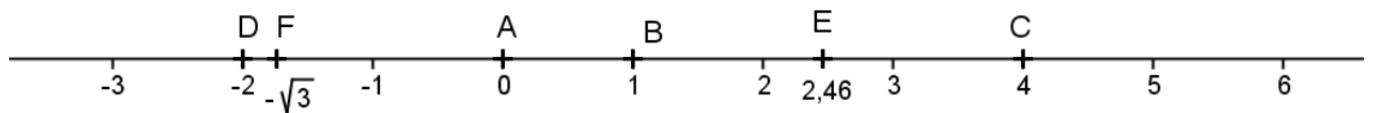
II) Les intervalles de \mathbb{R}

1) Définitions

a) Représentation graphique de \mathbb{R}

L'ensemble des nombres réels est habituellement représenté sous la forme d'une droite graduée : à chaque point de la droite est associé un unique nombre réel appelé **abscisse** de ce point

Exemple



Les abscisses des points A, B, C, D, E et F sont respectivement :

$$x_A = 0 ; x_B = 1 ; x_C = 4 ; x_D = -2 ; x_E = 2,46 \text{ et } x_F = -\sqrt{3}$$

b) Les intervalles de \mathbb{R}


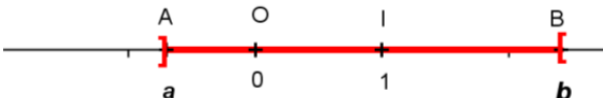



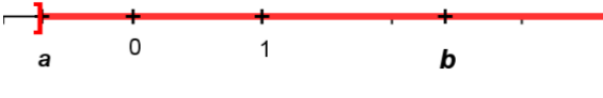
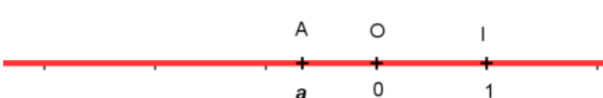
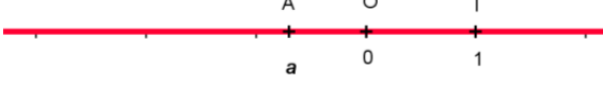
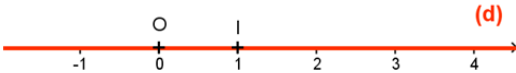
Un **intervalle de \mathbb{R}** est représenté par un segment, une demi-droite ou par la droite toute entière. Chaque intervalle est associé à une inégalité ou un encadrement concernant les abscisses des points de la droite appartenant à ce segment ou cette demi-droite.

Soit A et B deux points de la droite d'abscisses respectives a et b ($a < b$) et soit M un point de la droite d'abscisse x

On obtient donc les différents intervalles suivants :

2) Tableau récapitulatif des neuf intervalles de \mathbb{R}

Les neuf types d'intervalles sont dans le tableau ci-dessous:

M	Nombres x	Représentation graphique	Notation intervalle
$M \in [AB]$	$a \leq x \leq b$	 <p>Intervalle fermé borné</p>	$[a; b]$
$M \in]AB[$	$a < x < b$	 <p>Intervalle ouvert borné</p>	$]a; b[$
$M \in [AB[$	$a \leq x < b$	 <p>Intervalle semi-ouvert à droite, borné</p>	$[a; b[$
$M \in]AB]$	$a < x \leq b$	 <p>Intervalle semi-ouvert à gauche, borné</p>	$]a; b]$
$M \in [AB)$	$x \geq a$	 <p>Intervalle fermé infini</p>	$[a; +\infty[$
$M \in]AB)$	$x > a$	 <p>Intervalle ouvert infini</p>	$]a; +\infty[$
$M \in [BA)$	$x \leq b$	 <p>Intervalle fermé infini</p>	$]-\infty; b]$
$M \in]BA)$	$x < b$	 <p>Intervalle ouvert infini</p>	$]-\infty; b[$
$M \in (d)$	$x \in \mathbb{R}$		$]-\infty; +\infty[$

Remarques :

- On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités lui appartiennent.
Par exemple : $[6 ; 12]$ ou $[-2 ; + \infty [$ sont des intervalles fermés.
- On dit qu'un intervalle est **ouvert** si ses extrémités ne lui appartiennent pas
Par exemple : $] -4 ; 7 [$ ou $] - \infty ; 3 [$ sont des intervalles ouverts.
- L'ensemble \mathbb{R} est aussi un intervalle, il peut se noter $] -\infty ; +\infty [$
- L'ensemble ne contenant **aucun réel est aussi un intervalle**, c'est l'**intervalle vide**, il se note \emptyset
- Le symbole ∞ se lit **infini**.

Dans le paragraphe suivant, nous allons voir plus en détail ces neufs intervalles de \mathbb{R}

3) Les neufs intervalles de \mathbb{R} (explication détaillée)

a) Les intervalles fermés bornés

Soit a et b deux nombres réels. On appelle intervalle fermé borné de a à b , et on note $[a; b]$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels compris entre a et b ; les nombres a et b sont eux-mêmes éléments de $[a; b]$.

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

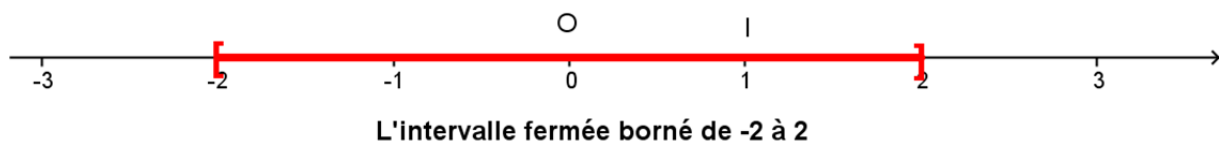
Remarques.

Les nombres a et b sont appelés bornes de l'intervalle $[a; b]$.

Si $a > b$, on adopte la convention : $[a; b] = \emptyset$ (ensemble vide).

Si $a = b$, alors $[a; b] = \{a\}$. L'intervalle dans ce cas est réduit à un singleton.

Si $a < b$, alors $[a; b]$ contient une infinité de nombres, mais sa longueur est finie et vaut $b - a$. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



b) Les intervalles ouverts bornés

Soit a et b deux nombres réels. On appelle intervalle ouvert borné de a à b , et on note $]a; b[$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels compris entre a et b ; les nombres a et b ne sont eux-mêmes pas éléments de $]a; b[$.

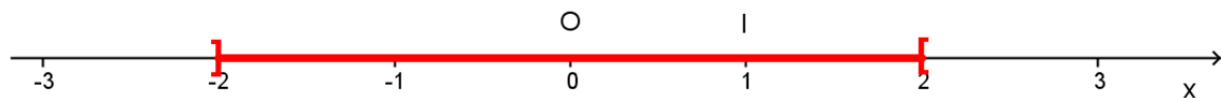
$$]a; b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

Remarques :

Les nombres a et b sont appelés bornes de l'intervalle $]a; b[$.

Si $a \geq b$, on adopte la convention : $]a; b[= \emptyset$ (ensemble vide).

Si $a < b$, alors $]a; b[$ contient une infinité de nombres, mais sa longueur est finie et vaut $b - a$. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



L'intervalle ouvert borné de -2 à 2

c) Les intervalles semi-ouverts à droite bornés

Soit a et b deux nombres réels. On appelle intervalle semi-ouvert à droite borné de a à b , et on note $[a; b[$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels compris entre a et b ; le nombre a est un élément de $[a; b[$ mais b n'est pas un élément de $[a; b[$.

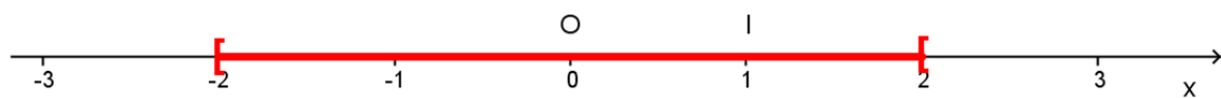
$$[a; b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

Remarques :

Les nombres a et b sont appelés bornes de l'intervalle $[a; b[$.

Si $a \geq b$, on adopte la convention : $[a; b[= \emptyset$ (ensemble vide).

Si $a < b$, alors $[a; b[$ contient une infinité de nombres, mais sa longueur est finie et vaut $b - a$. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



L'intervalle semi-ouvert à droite borné de -2 à 2

d) Les intervalles semi-ouverts à gauche bornés

Soit a et b deux nombres réels. On appelle intervalle semi-ouvert à gauche borné de a à b , et on note $]a; b]$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels compris entre a et b ; le nombre a n'est pas un élément de $]a; b]$, mais b est un élément de $]a; b]$.

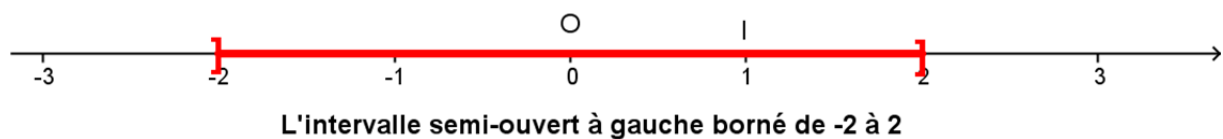
$$]a; b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

Remarques :

Les nombres a et b sont appelés bornes de l'intervalle $]a; b]$.

Si $a \geq b$, on adopte la convention : $]a; b] = \emptyset$ (ensemble vide).

Si $a < b$, alors $]a; b]$ contient une infinité de nombres, mais sa longueur est finie et vaut $b - a$. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



e) Les intervalles ouverts infinis. Cette catégorie contient elle-même deux types d'intervalles

• Soit a un nombre réel. On appelle intervalle ouvert infini de a à $+\infty$, et on note $]a; +\infty[$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels strictement supérieurs à a ; le nombre a n'est pas un élément de $]a; +\infty[$.

$$]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$$

Remarques :

Le nombre a et le symbole $+\infty$ sont appelés bornes de l'intervalle $]a; +\infty[$.

Il contient une infinité de nombres.

Sa longueur est infinie. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



• Soit a un nombre réel. On appelle intervalle ouvert infini de $-\infty$ à a , et on note $] - \infty; a[$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels strictement inférieurs à a ; le nombre a n'est pas un élément de $] - \infty; a[$.

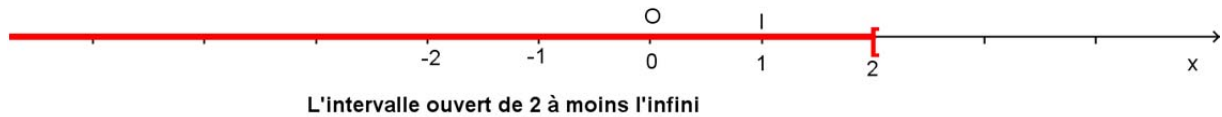
$$] - \infty; a[= \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$$

Remarques :

Le nombre a et le symbole $-\infty$ sont appelés bornes de l'intervalle $] - \infty; a[$.

Il contient une infinité de nombres.

Sa longueur est infinie. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



f) Les intervalles fermés infinis. Cette catégorie contient elle-même deux types d'intervalles

• Soit a un nombre réel. On appelle intervalle fermé infini de a à $+\infty$, et on note $[a; +\infty[$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels supérieurs à a ; le nombre a est un élément de $[a; +\infty[$.

$$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$$

Remarques :

Le nombre a et le symbole $+\infty$ sont appelés bornes de l'intervalle $[a; +\infty[$.

On observe un crochet ouvert à la borne $+\infty$. Ce n'est pas une erreur. Ce fait peut être considéré comme une convention au niveau de la classe de seconde. Il faut attendre une étude plus approfondie des nombres réels pour avoir une explication cohérente de ce fait. Il contient une infinité de nombres.

Sa longueur est infinie. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



• Soit a un nombre réel. On appelle intervalle fermé infini de $-\infty$ à a , et on note $] - \infty; a]$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels inférieurs à a ; le nombre a est un élément de $] - \infty; a]$.

$$] - \infty; a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$$

Remarques :

Le nombre a et le symbole $-\infty$ sont appelés bornes de l'intervalle $] - \infty; a]$.

On observe un crochet ouvert à la borne $+\infty$. Ce n'est pas une erreur. Ce fait peut être considéré comme une convention au niveau de la classe de seconde. Il faut attendre une étude plus approfondie des nombres réels pour avoir une explication cohérente de ce fait. Il contient une infinité de nombres.

Sa longueur est infinie. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



L'intervalle fermé de 2 à moins l'infini

L'intervalle $] - \infty; +\infty[$. C'est une autre façon de noter \mathbb{R} .

Remarques :

Les symboles $-\infty$ et $+\infty$ sont appelés bornes de l'intervalle $] - \infty; +\infty [$.

Il est de longueur infinie.

Pour des raisons élucidées à des niveaux supérieurs à celui de la classe de seconde, cet intervalle est à la fois ouvert et fermé !!

II) Intersections et réunions d'intervalles

1) Intersections

a) Définition

Soit E et F deux ensembles quelconques. On appelle intersection de E et F , et on note $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui sont communs à E et F .

En d'autres termes, x est un élément de $E \cap F$ si et seulement si x est un élément de E ET x est un élément de F .

Remarques : $E \cap F = F \cap E$.

$$E \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$E \cap \mathbb{R} = E.$$

Si I et J sont des intervalles fermés bornés, alors leur intersection est également un intervalle fermé borné.

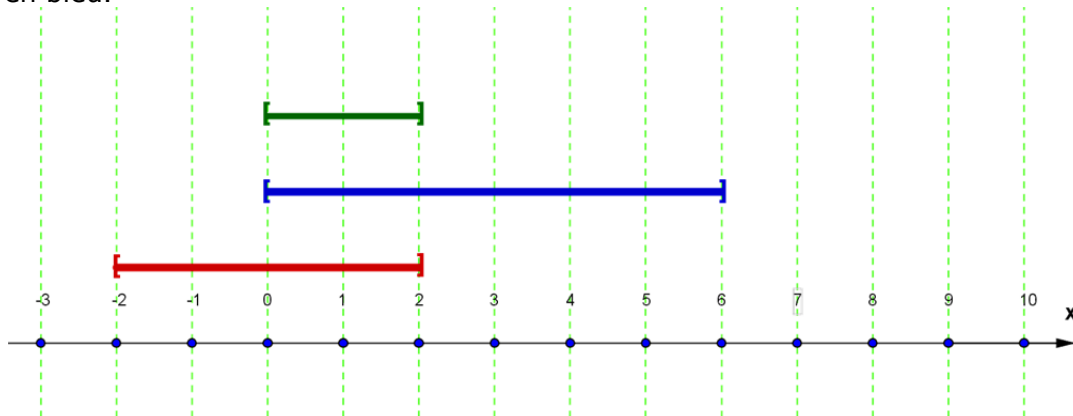
Si I et J sont des intervalles ouverts bornés, alors leur intersection est également un intervalle ouvert borné.

b) Exemples

Remarque importante :

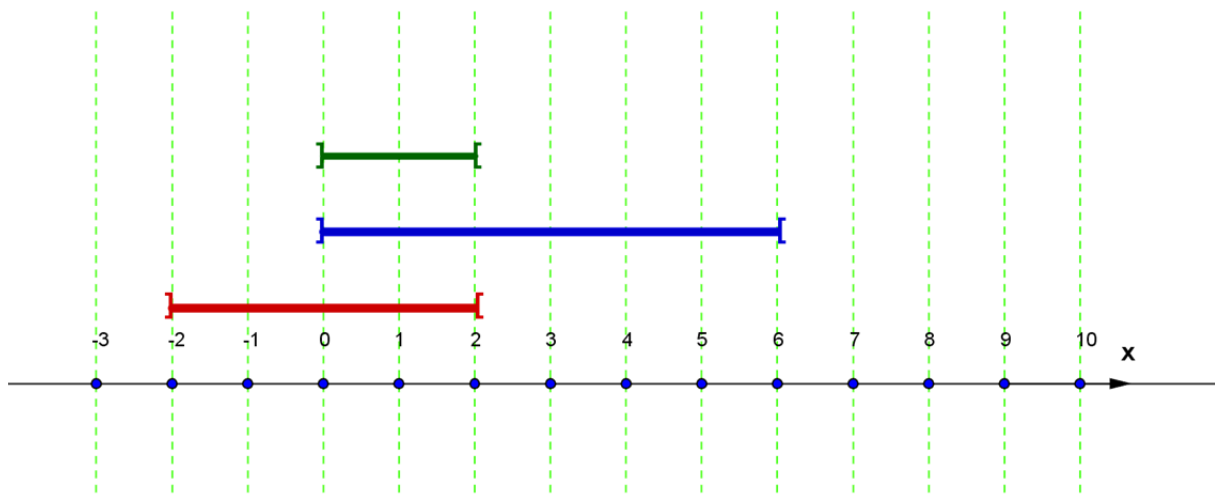
Dans tous les exemples, nous avons décalé les intervalles par rapport à l'axe gradué pour des raisons de clarté du dessin, mais en principe, la représentation graphique d'un intervalle reste toujours une partie de l'axe gradué: les intervalles dessinés ci-dessus devraient donc se trouver tous sur l'axe gradué.

Exemple 1. En vert, l'intervalle $[0; 2]$, intersection des intervalles $[-2; 2]$ en rouge et $[0; 6]$ en bleu.



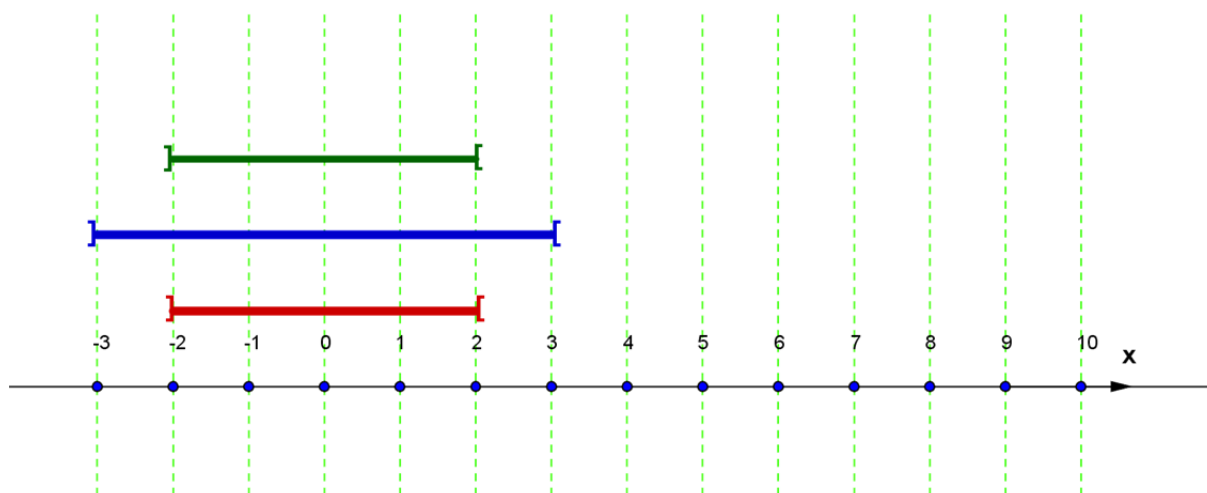
$$[-2 ; 2] \cap [0 ; 6] = [0 ; 2]$$

Exemple 2. En vert, l'intervalle $]0; 2[$, intersection des intervalles $] -2; 2[$ en rouge et $]0; 6[$ en bleu.



$$]-2 ; 2[\cap]0 ; 6[=]0 ; 2[$$

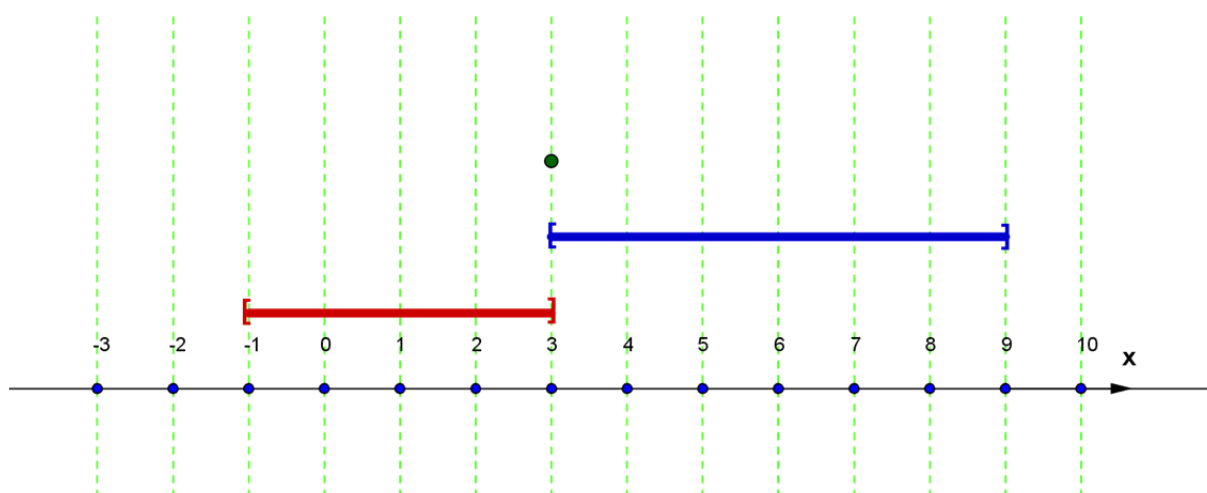
Exemple 3 : Ici, l'intersection est réduite au plus petit des deux intervalles, parce que ce plus petit intervalle est inclus dans le plus grand.



$$]-2 ; 2[\cap]-3 ; 3[=]-2 ; 2[$$

Exemple 4 : L'intervalle dessiné en vert est l'intersection de l'intervalle bleu $[3 ; 9]$ et de $[-1 ; 3]$ en rouge.

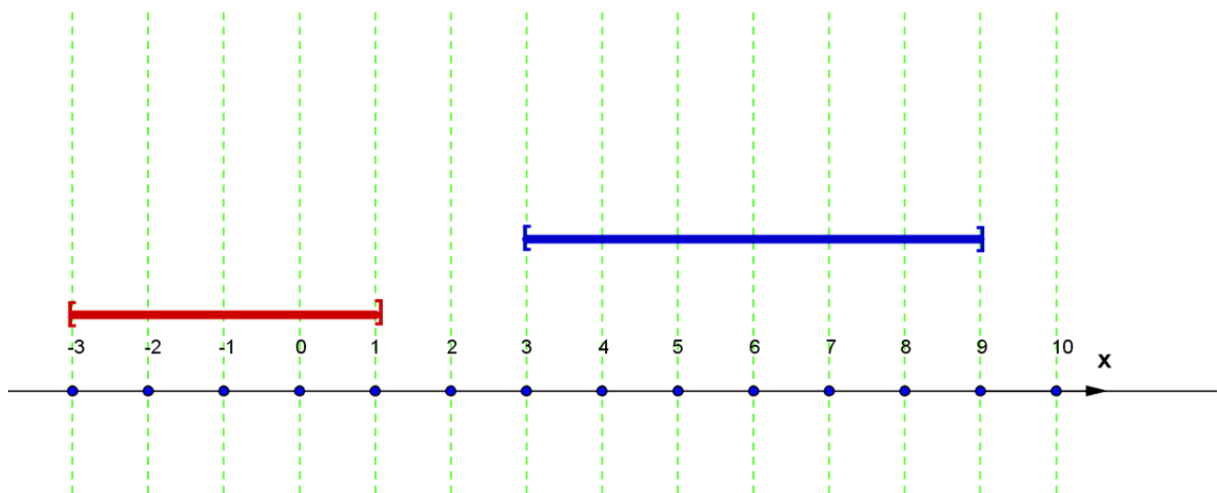
L'intersection des deux intervalles est ici réduite un point.



$$[-1 ; 3] \cap [3 ; 9] = \{ 3 \}$$

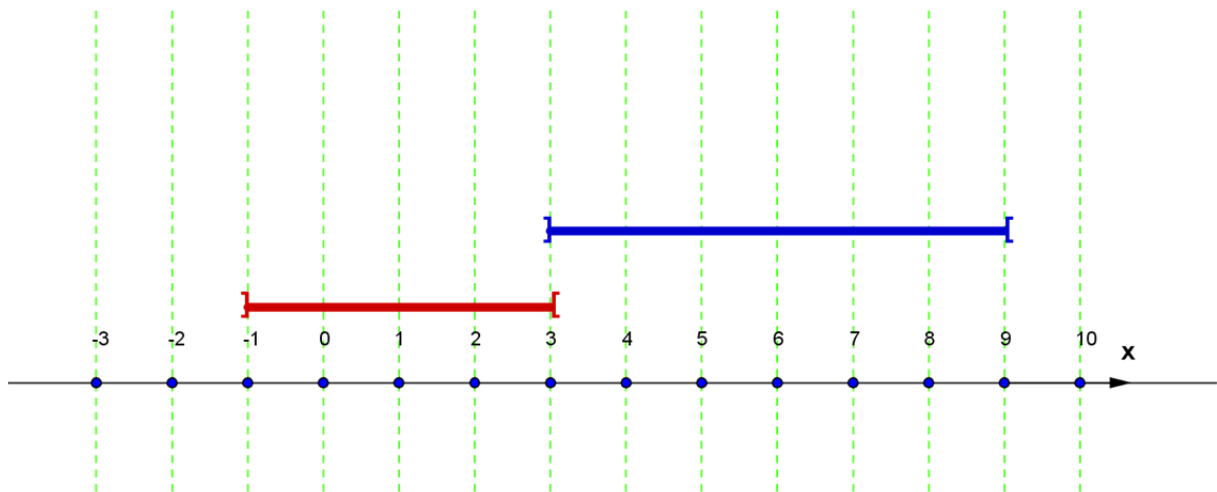
Exemple 5 :

Et ici, l'intersection de ces deux intervalles est vide :



$$[-3 ; 1] \cap [3 ; 9] = \emptyset$$

Exemple 6: Et voici une intersection d'ouverts vide !



$$]-1 ; 3[\cap]3 ; 9[= \emptyset$$

2) Réunions

a) Définition

Soit E et F deux ensembles quelconques. On appelle réunion de E et F , et on note $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui sont soit dans E , soit dans F .

En d'autres termes, x est un élément de $E \cup F$ si et seulement si x est un élément de E **OU** x est un élément de F .

Remarques : $E \cup F = F \cup E$.

$$E \cup \emptyset = E.$$

$$E \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

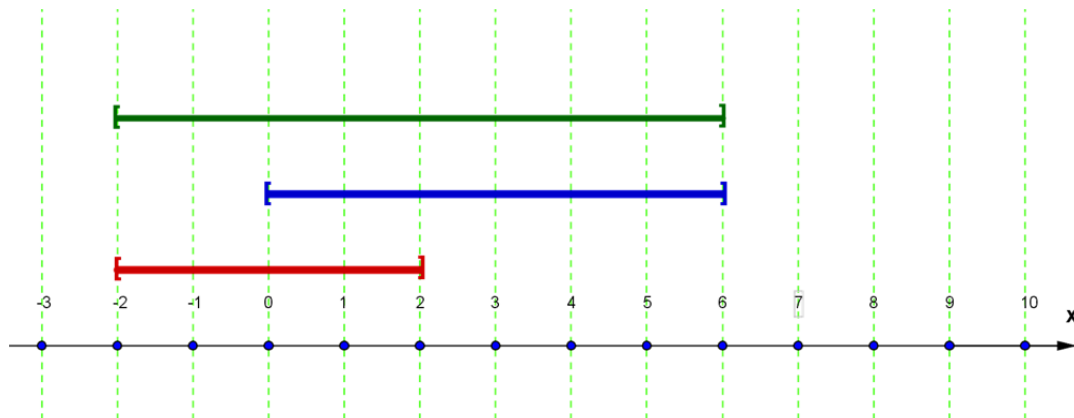
Si I et J sont des intervalles fermés bornés, alors leur réunion n'est pas systématiquement un intervalle. Par contre, la réunion de deux intervalles fermés bornés est fermée et bornée.

b) Exemples

Remarque importante :

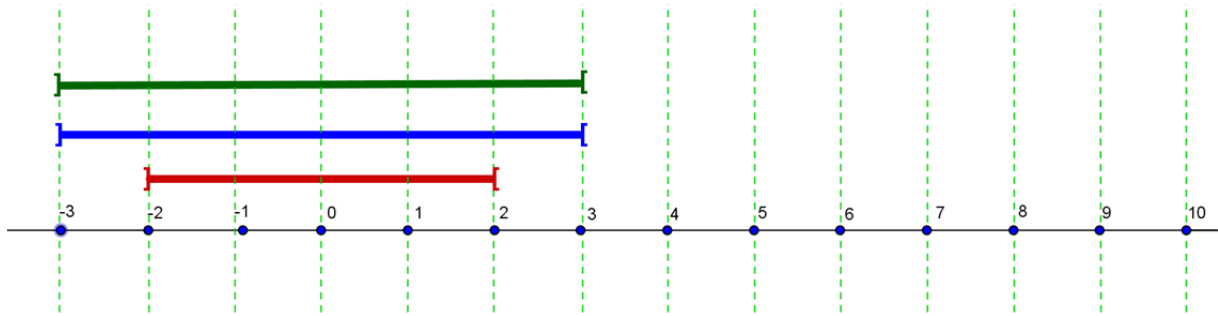
Dans tous les exemples, nous avons décalé les intervalles par rapport à l'axe gradué pour des raisons de clarté du dessin, mais en principe, la représentation graphique d'un intervalle reste toujours une partie de l'axe gradué: les intervalles dessinés ci-dessus devraient donc se trouver tous sur l'axe gradué.

Exemple 1: En vert, l'intervalle $[-2; 6]$, réunion des intervalles $[-2; 2]$ en rouge et $[0; 6]$ en bleu.



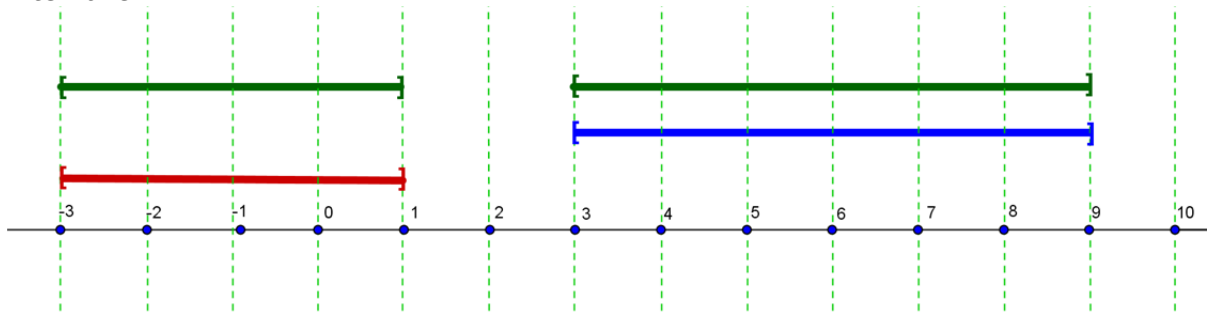
$$[-2 ; 2] \cup [0 ; 6] = [-2 ; 6]$$

Exemple 2 : Ici, la réunion est le plus grand des deux intervalles parce que le plus petit intervalle est inclus dans ce plus grand.



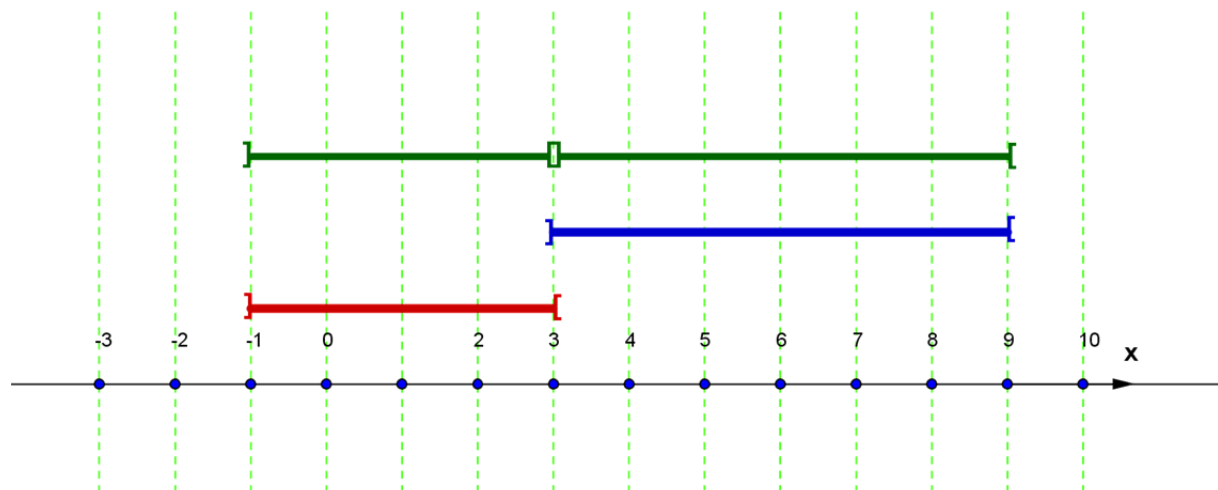
$$]-2 ; 2[\cup]-3 ; 3[=]-3 ; 3[$$

Exemple 3: Voici un exemple où on ne peut pas écrire la réunion sous la forme d'un intervalle.



$]-3 ; 1[\cup [3 ; 9]$ ne peut avoir une autre écriture : on ne peut l'écrire sous la forme d'un intervalle.

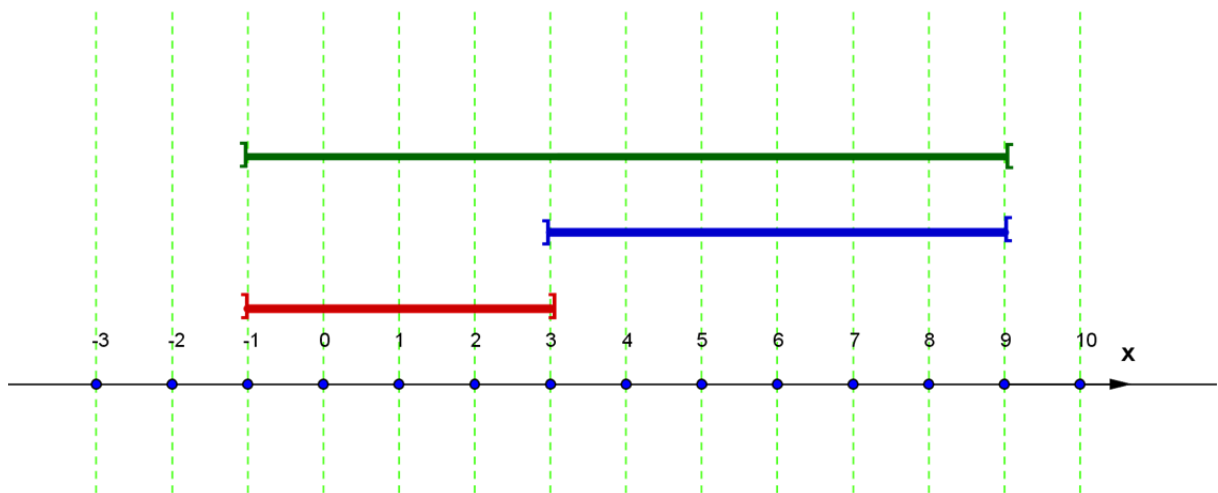
Exemple 4: Voici maintenant la réunion de deux intervalles : attention à l'absence du nombre 3 dans la réunion :



$]-1 ; 3[\cup]3 ; 9[$ Dans ce cas on ne peut pas écrire la réunion sous forme d'un intervalle.

Exemple 5:

Mais si l'une des bornes est fermée en 3, voilà ce que devient la réunion :



$$]-1 ; 3] \cup]3 ; 9[=]-1 ; 9[$$

Moralité : il faut être attentif (ou attentive) !!!