Résolution graphique d'équations et d'inéquations

I) Equations.

Soit $\mathbf{f}$ une fonction définie sur un domaine $\mathbf{I}$ inclus dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathbf{k}$, un nombre réel.
On suppose qu'on doit résoudre une équation du type $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{k}$.

Principe :

On suppose qu'on dispose de la courbe représentative de la fonction f.
Résoudre l'équation $\mathrm{f}(x) = \mathrm{k}$, c'est trouver les antécédents par f du nombre k.

Or, sur la courbe représentative de f, les valeurs obtenues par f, autrement dit, les images par f, sont repérées sur l'axe des ordonnées.
Il faut donc tout d'abord repérer la valeur k sur l'axe des ordonnées.

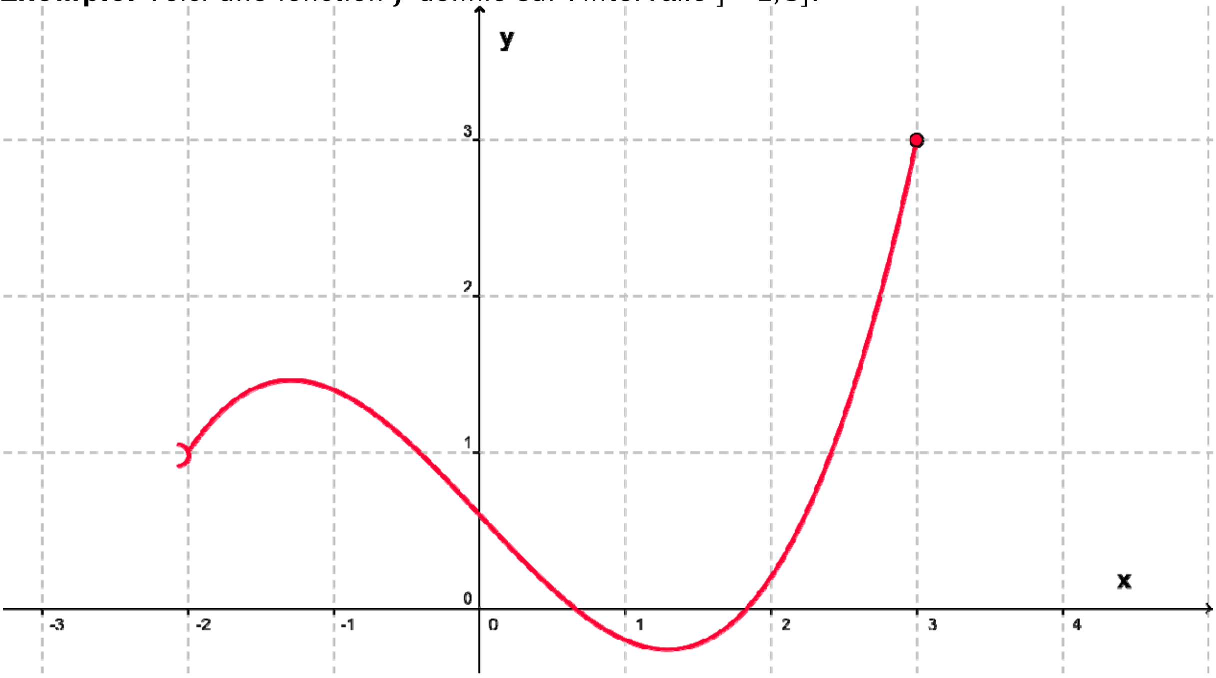
Ensuite, il faut connaître les points de la courbe représentative de f dont l'ordonnée est k.
Il faut donc tracer la droite d'équation $y = k$ (c'est aussi la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées $(0;k)$) et marquer les points d'intersection de cette droite avec la courbe représentative de f.

Attention ! Il se peut qu'il y ait un ou plusieurs point(s) obtenu(s). Il se peut aussi qu'il n'y en ait aucun.

• Si la droite d'équation $y = k$ ne coupe pas la courbe représentative de f, cela veut dire que l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution et le travail est terminé.

•Le(s) point(s) obtenu(s) ont des coordonnées du type $(x;f(x))$ car ils sont situés sur la courbe de f, avec $f(x) = k$ puisqu'ils sont situés sur la droite d'équation $y = k$.
Il suffit donc de lire, sur le graphique, la ou les abscisse(s) de ce(s) point(s) d'intersection. Ce sont les solutions de l'équation.

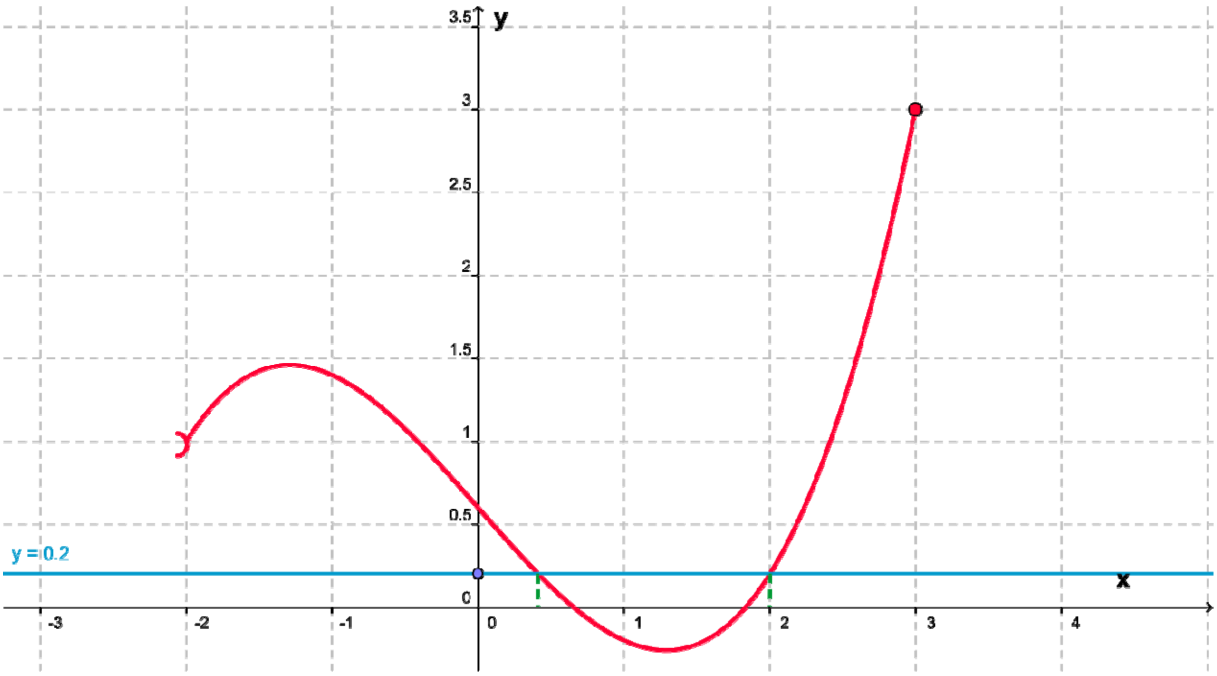
Exemple. Voici une fonction f définie sur l'intervalle $]-2;3]$.



On résout successivement les équations :

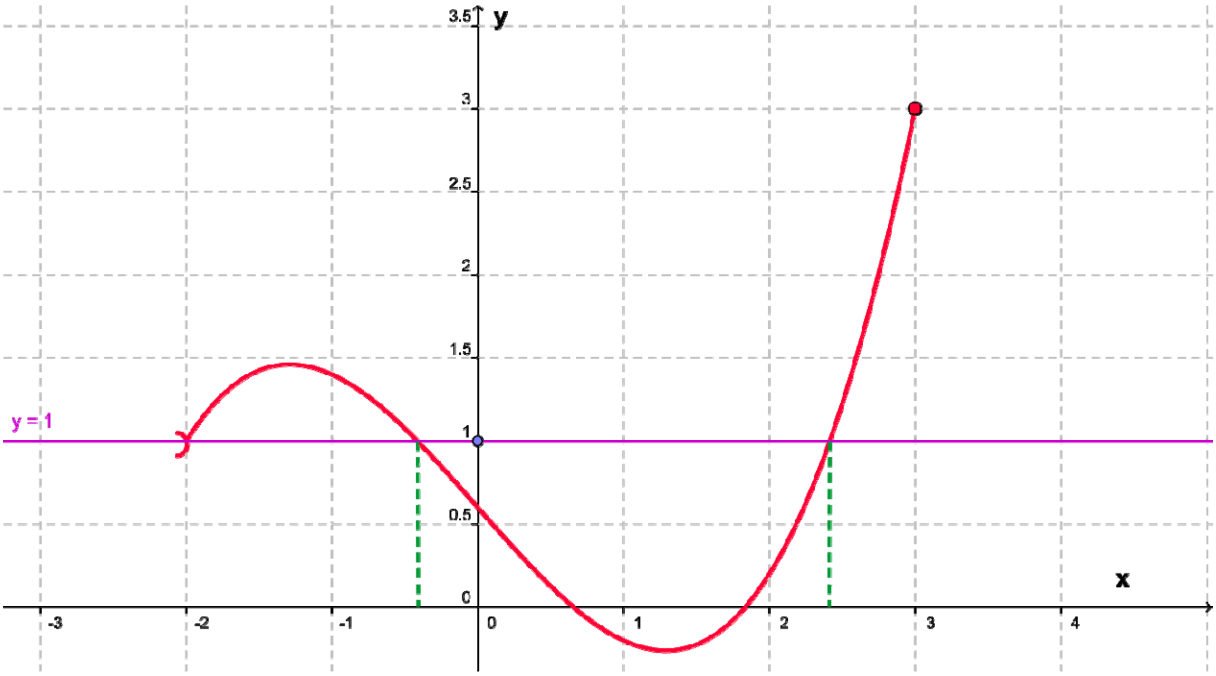
$f(x) = 0,2 \qquad f(x) = 1 \qquad f(x) = 1,25 \qquad f(x) = 2 \qquad f(x) = 3 \qquad f(x) = 3,4$

Résolution de $f(x) = 0,2$.



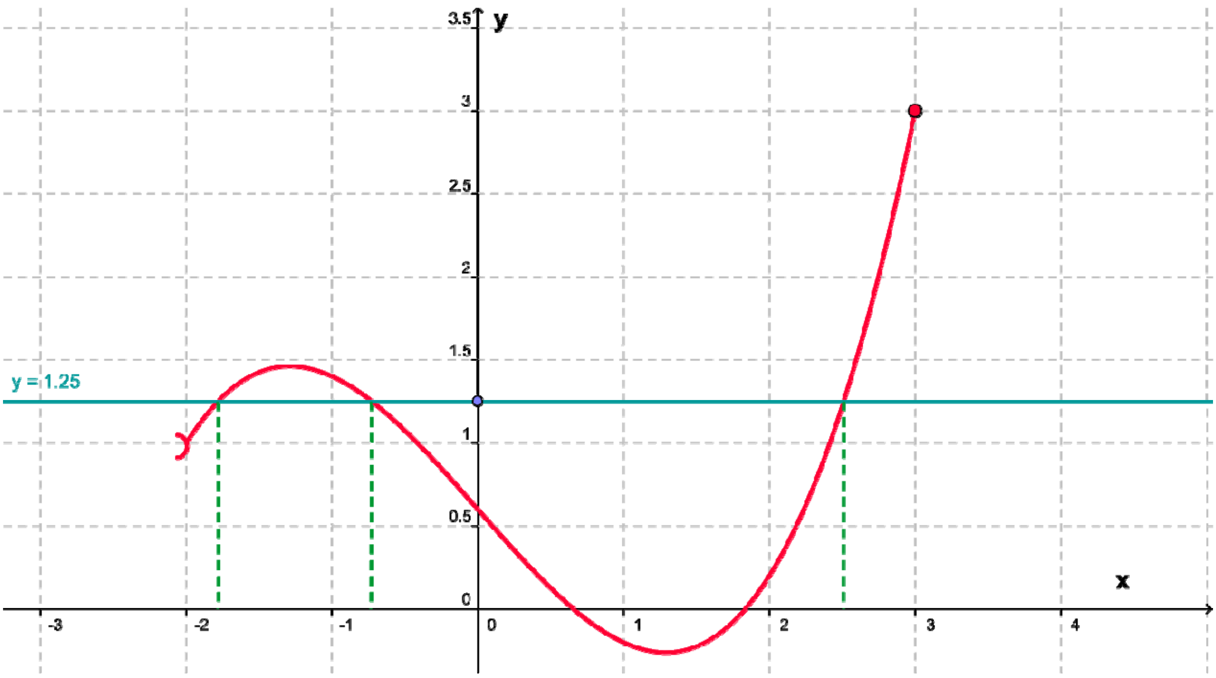
On constate que l'équation admet deux solutions qui valent environ 0,4 et 2.

Résolution de $f(x) = 1$.



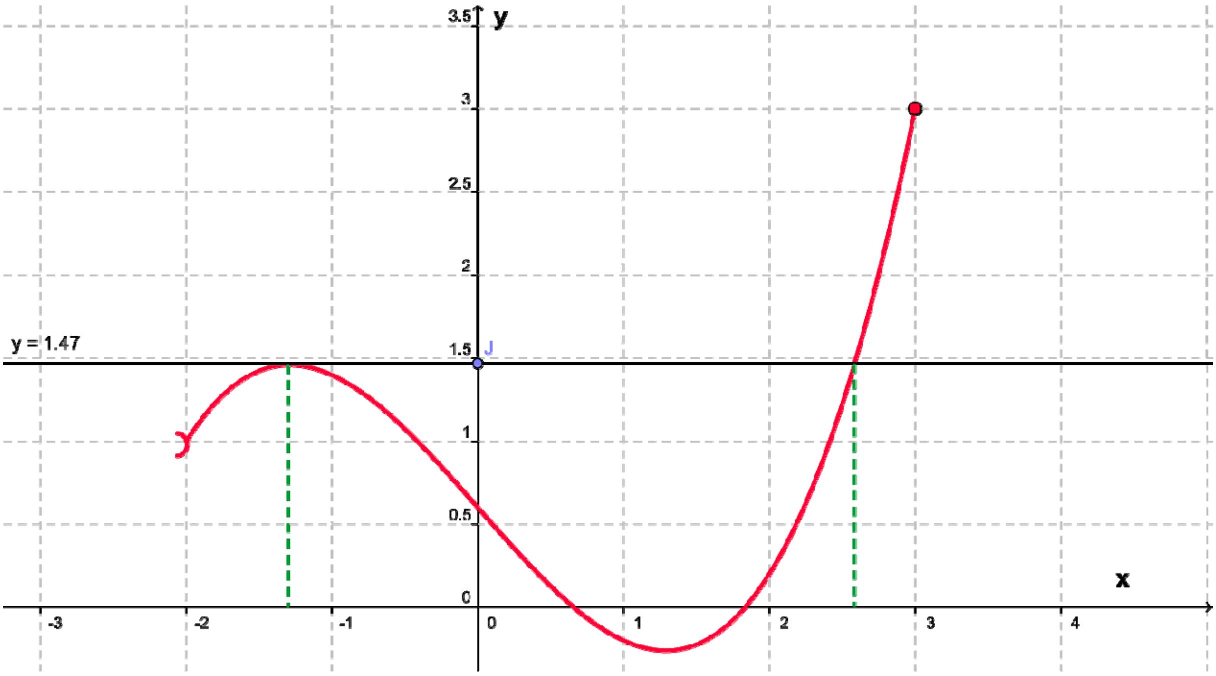
On constate que l'équation admet deux solutions qui valent environ -0,4 et 2,4. Attention ! La courbe ne contient aucun point d'abscisse -2 ! La fonction n'est en effet pas définie en -2. Il faut donc bien se garder de proposer -2 comme solution !

Résolution de $f(x) = 1,25$.



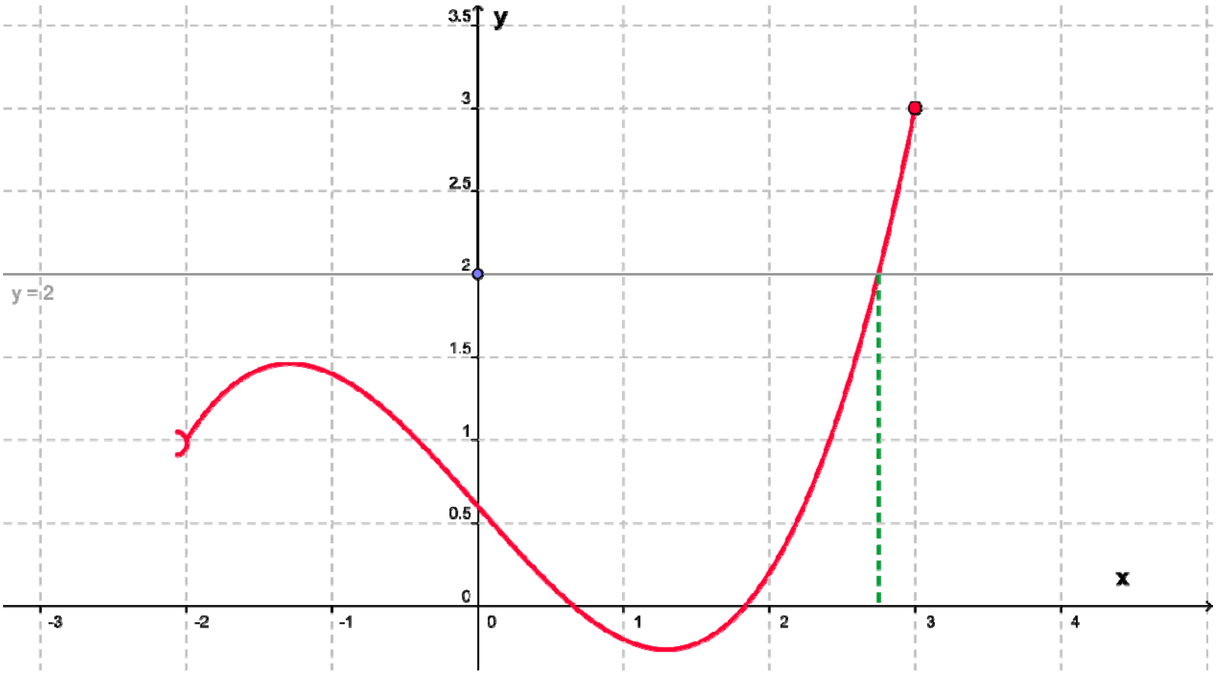
On constate que l'équation admet trois solutions qui valent environ -1,7 pour la plus petite, -0,7 et 2,5.

Résolution de $f(x) = 1,47$.



L'équation semble dans ce cas avoir deux solutions qui valent environ -1,3 et 2,6. Remarquons que la première solution correspond à un maximum local de la fonction f.

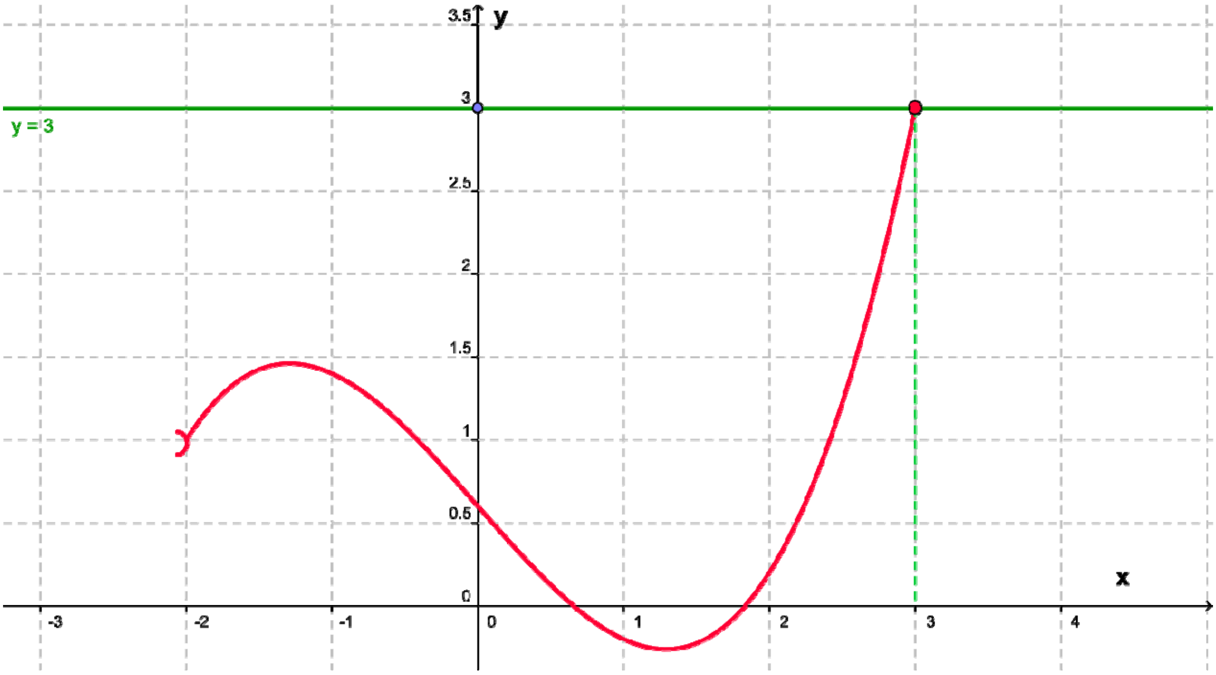
Résolution de $f(x) = 2$.



L'équation possède une et une seule solution qui vaut 2,8.

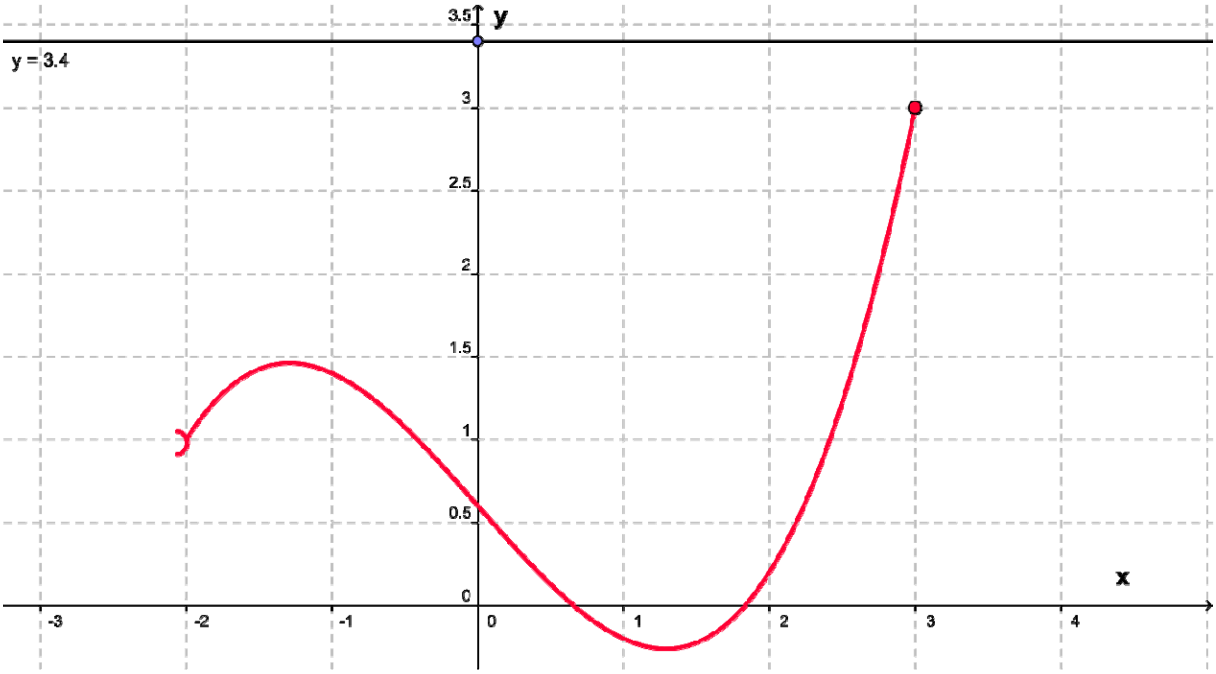
Remarque. Lors de la résolution de $\boldsymbol{f(x) = 1,47}$, on a trouvé comme solution -1,3 et 2,6. On peut constater que sur l'intervalle $[\mathbf{2,7}\,;\,\mathbf{3}]$, la fonction $\boldsymbol{f}$ est strictement monotone et prend des valeurs strictement supérieures à 1,47. Dans ce contexte, on constate que l'équation $\boldsymbol{f(x) = 2}$ possède une et une seule solution. Cette situation particulière fera l'objet de généralisations en classe terminale. Mais on peut déjà voir ici le lien qui existe entre la stricte monotonie de la fonction et l'unicité (c'est-à-dire le caractère unique) de la solution de l'équation.

Résolution de $\boldsymbol{f(x) = 3}$



On constate que l'équation possède une seule solution qui est 3. Notons que, contrairement à la valeur -2, la valeur 3 est dans l'intervalle de définition de $\boldsymbol{f}$.

Résolution de $f(x) = 3,4$.



Cette fois-ci, l'équation n'admet aucune solution. Cela est dû au fait, dans cet exemple, que 3,4 est strictement supérieur au maximum absolu de f.

II) Inéquations.

Soit f une fonction définie sur un domaine I inclus dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit k, un nombre réel.
On suppose qu'on doit résoudre une inéquation du type $f(x) \leq k$, dite inégalité au sens large, ou bien une inéquation de type $f(x) < k$, dite inégalité au sens strict.

Principe : On suppose qu'on dispose de la courbe représentative de la fonction f.

On commence par tracer sur le graphique la droite d'équation $y = k$.

Pour résoudre l'inéquation $f(x) \leq k$:

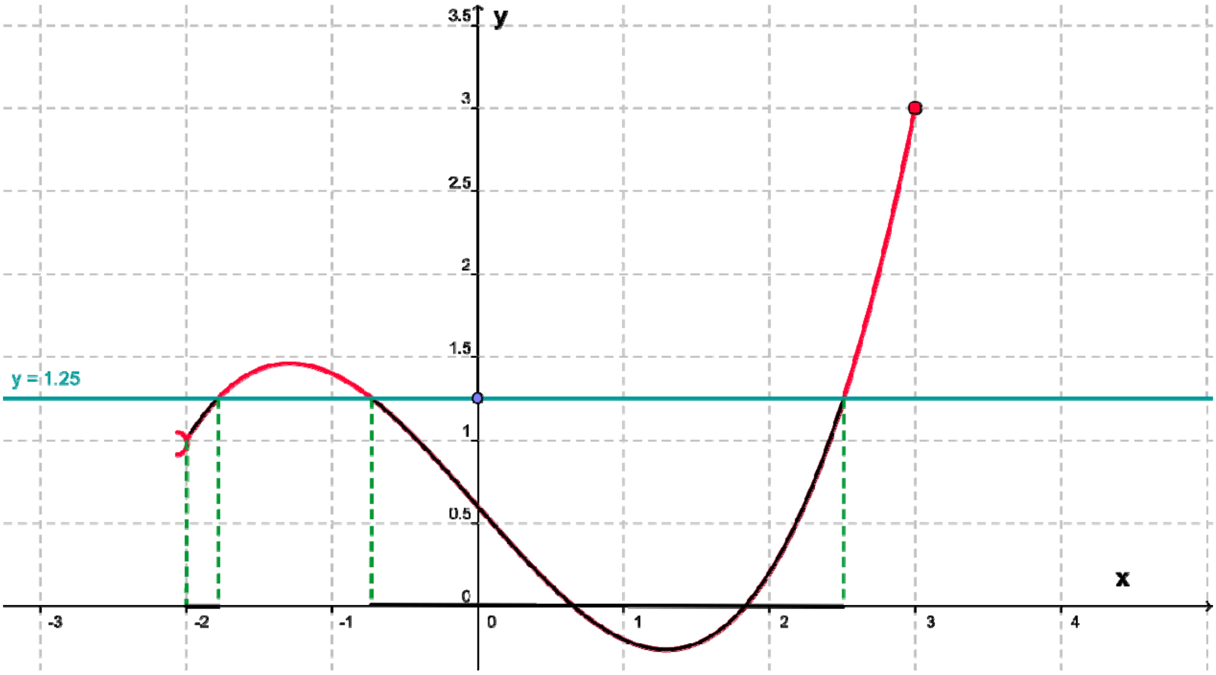
Il faut repérer tous les points de la courbe de f dont les ordonnées sont inférieures ou égales à k. Pour dire simplement, il s'agit de voir les portions de la courbe qui sont en-dessous de la droite d'équation $y = k$.

L'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses des points de la courbe qui viennent d'être mis en évidence.

Pour résoudre l'inéquation $f(x) \geq k$, il faut repérer tous les points de la courbe de f dont les ordonnées sont supérieures ou égales à k. Pour dire simplement, il s'agit de voir les portions de la courbe qui sont au-dessus de la droite d'équation $y = k$.

L'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses des points de la courbe qui viennent d'être mis en évidence.
Il est souvent très utile aussi de résoudre l'équation $f(x) = k$

Exemple. On considère l'exemple de la fonction $\boldsymbol{f}$ du paragraphe I.
Résoudre l'inéquation $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \mathbf{1,25}$.



On a commencé par résoudre l'équation $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1,25}$. Ce travail a déjà été effectué au paragraphe I. On a repassé en noir les parties de la courbes dont les ordonnées sont inférieures ou égales à $\boldsymbol{k}$. Ensuite, on a colorié en noir les abscisses correspondant aux points de la courbe noircie. L'ensemble des solutions est donc : $]-\mathbf{2};-\mathbf{1,7}] \cup [-\mathbf{0,7};\mathbf{2,5}]$.

Attention ! La borne -2 est exclue car -2 n'est pas dans le domaine de définition de $\boldsymbol{f}$.

Résoudre l'équation $\boldsymbol{f}(x) < 1{,}25$.
L'ensemble des solutions est: $]-\mathbf{2};-\mathbf{1,7}[\cup]-\mathbf{0,7};\mathbf{2,5}[$.
Maintenant, toutes les bornes des intervalles sont ouvertes. La valeur -2 est interdite (déjà vu), les autres ne sont pas interdites, mais l'inégalité est stricte ce qui interdit de mettre dans l'ensemble des solutions de cette inéquation les solutions de l'équation $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{1,25}$.

Résoudre l'équation $\boldsymbol{f}(x) > 1{,}25$.
L'ensemble des solutions est : $]-\mathbf{1,7};-\mathbf{0,7}[\cup]-\mathbf{2,5};\mathbf{3}[$.
Maintenant, toutes les bornes des intervalles sont ouvertes. La valeur 3 est autorisée, mais l'inégalité stricte interdit de mettre dans l'ensemble des solutions de cette inéquation les solutions de l'équation $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{1,25}$.