

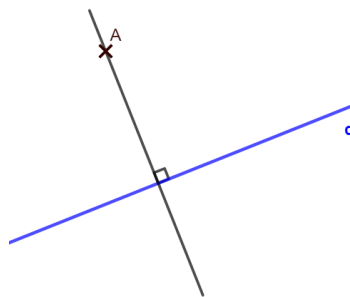
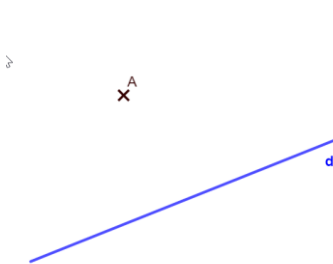
Projeté orthogonal. Angles

I) Définition

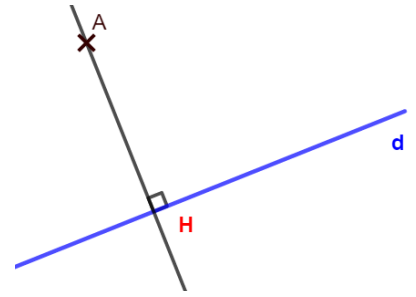
Soit A un point du plan et d'une droite.

Le projeté orthogonal du point A sur la droite d est le point d'intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire à d passant par le point A.

Exemple et méthode : Tracer le projeté orthogonal du point A sur d que l'on nommera H



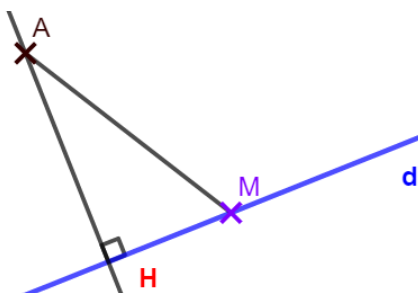
On trace la droite perpendiculaire à d passant par le point A



On note **H** le point d'intersection des deux droites.

II) Propriété

Le projeté orthogonal H du point A sur la droite d est le point de la droite d le plus proche de A. C'est-à-dire que pour tout point M appartenant à la droite d, distinct du point H, on a $AM > AH$. *AH est la plus petite distance entre A et d.*



Démonstration : Soit M un point de d distinct de H, Dans le triangle AHM rectangle en H , d'après le théorème de Pythagore :

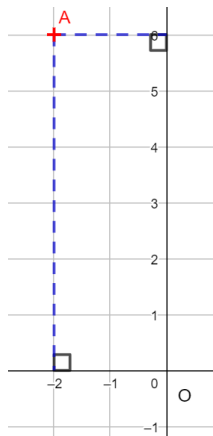
$$AM^2 = AH^2 + HM^2, \text{ comme M est distinct de H, } HM^2 > 0$$

Donc $AM^2 > AH^2$, AM et AH étant positive (ce sont des longueurs) alors en déduit que pour tout M distinct du point de H, **$AM > AH$** .

III) Définition

La distance du point A à la droite d est la longueur AH, où H est le projeté orthogonal de A sur d.

Exemple : Dans un repère orthonormé le point A a pour coordonnées A(-2 ; 6). Déterminer la distance du point A à chacun des axes du repère.



La distance de A à l'axe des ordonnées est 2,
la distance de A à l'axe des abscisses est 6

IV) Problèmes d'optimisation géométrique

Dans de nombreux problèmes on cherche à rendre minimale ou maximale des grandeurs géométriques (longueur, périmètre, aire, volume...)

- Pour minimiser une ligne brisée on peut être amené à utiliser l'inégalité triangulaire vue au collège :

Propriété

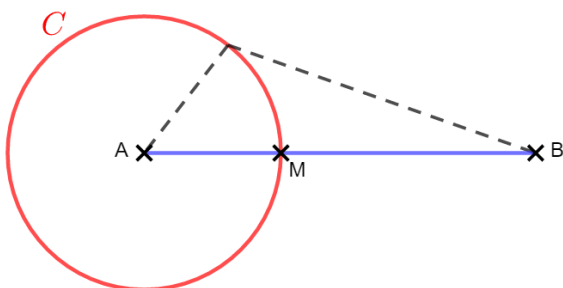
A, B, C sont trois points du plan. Les trois propositions sont équivalentes :

- $C \in [AB]$
- La somme des distances $AC + CB$ est minimale
- $AB = AC + CB$

- Dans d'autres cas, on peut être amené à exprimer la grandeur à optimiser comme une fonction d'une variable dont on peut trouver le maximum ou le minimum

Exemples :

Exemple 1 : Comment minimiser la longueur d'une ligne brisée :



Problème : On donne deux points A et B distants de 6 cm. On veut placer un point M à 2 cm du point A tel que $AM + MB$ soit minimale.

Solution : M appartient au cercle C de centre A et de rayon 2 cm. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout point M du plan : $AM + MB \geq AB$
 $AM + MB$ est minimale lorsque $AM + MB = AB$ égalité obtenue lorsque $M \in [AB]$.
 Par conséquent, le point M cherché est le point d'intersection du cercle C et du segment $[AB]$.

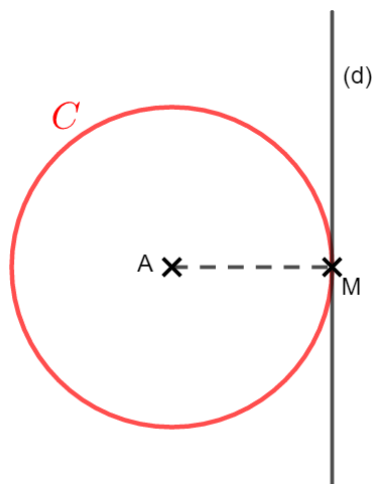
Exemple 2 : Construire un triangle ABC tel que $AB = 2,7$ cm $AC = 7,3$ cm et $BC = 4,6$.
Que peut-on dire des points A, B et C ?

$$AB + BC = 2,7 + 4,6 = 7,3$$

$AB + BC = AC$ les points A, B et C sont alignés avec $B \in [AC]$



Exemple 3 : Soit (d) une droite et A un point n'appartenant pas à la droite d. On veut placer un point M sur la droite d de telle sorte que l'aire du disque de rayon AM soit la plus petite possible. Montrer que dans ce cas M est le projeté orthogonal de A sur d.

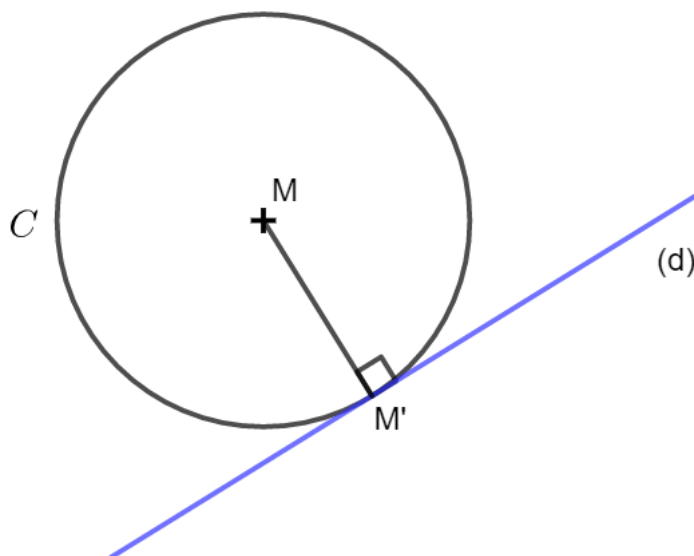


L'aire du disque est $\pi \times AM^2$. L'aire est minimale lorsque le rayon est minimal et, pour qu'il le soit il faut que M soit le plus proche possible de A. Or, la distance minimale entre un point et une droite est la distance entre ce point et le projeté orthogonal de ce point sur cette droite. Donc la position de M pour que l'aire soit minimale est lorsque M est le projeté orthogonal de A sur d.

V) Tangente à un cercle en un point

Propriété 2 : (admise) Si M' est le projeté orthogonal du point M sur une droite d alors le cercle de centre M passant par M' coupe une seule fois la droite d.

Définition 3 : Si une droite d coupe un cercle C en un unique point, on dit que la droite d est tangente au cercle C .



VI) Relations trigonométriques dans un triangle rectangle

1) Rappels :

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note $\widehat{ABC} = \hat{B}$

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \quad \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} \quad \text{et} \quad \tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

2) Propriété :

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note b une mesure en degrés de l'angle aigu $\widehat{ABC}$. Pour tout réel b tel que $0 < b < 90$ alors $\cos^2 b + \sin^2 b = 1$.

Démonstration :

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note b une mesure en degrés de l'angle aigu $\widehat{ABC}$. Pour tout réel b tel que $0 < b < 90$

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \quad \text{et} \quad \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} \quad \text{donc} \quad \cos^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{B} = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

Or le triangle ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{on a donc} \quad \cos^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{B} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$$

Exemple :

ABC est un triangle rectangle en A. On sait que $\cos(\hat{B}) = 0,6$,

a. Sans calculer la valeur de l'angle $\hat{B}$, en déduire la valeur du sinus de l'angle $\widehat{ABC}$.

b. Sachant que $BC = 8$ cm en déduire les longueurs AB et AC

a. ABC est un triangle rectangle en A, donc l'angle $\hat{B}$ est aigu, on a donc :

$$\cos^2(\hat{B}) + \sin^2(\hat{B}) = 1 \quad \text{donc} \quad 0,6^2 + \sin^2(\hat{B}) = 1 \quad \text{donc} \quad \sin^2(\hat{B}) = 1 - 0,36 = 0,64$$

Comme $\sin(\hat{B}) > 0$ on en déduit que $\sin(\hat{B}) = \sqrt{0,64} = 0,8$

Donc **$\sin(\hat{B}) = 0,8$**

b. Dans le triangle ABC rectangle en A, on a $\cos(\hat{B}) = \frac{AB}{BC}$

$$0,6 = \frac{AB}{8} \quad \text{donc} \quad AB = 8 \times 0,6 = 4,8 \quad \text{donc} \quad \mathbf{AB = 4,8 \text{ cm}}$$

De plus, $\sin(\hat{B}) = \frac{AC}{BC}$

$$0,8 = \frac{AC}{8} \quad \text{donc} \quad AC = 8 \times 0,8 = 6,4 \quad \text{donc} \quad \mathbf{AC = 6,4 \text{ cm}}$$