

Rappels de géométrie.

I) Théorème de Pythagore

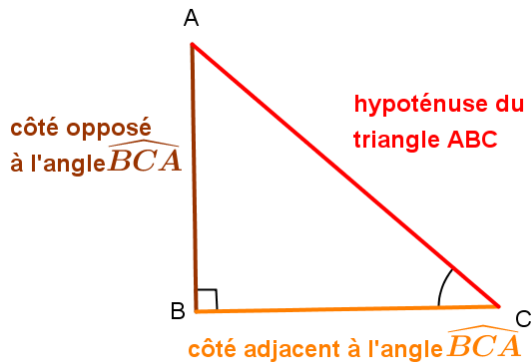
Calculer une longueur :	Prouver qu'un triangle est rectangle ou pas :						
Théorème de Pythagore	Réciproque du théorème de Pythagore (s'il est rectangle) ou sa contraposée (s'il ne l'est pas)						
Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Dans le triangle ABC rectangle en A : $BC^2 = AB^2 + AC^2$	Dans le triangle on calcule : D'une part : le carré du côté le plus grand D'autre part : la somme des carrés des 2 autres côtés Si le résultat est le même le triangle est rectangle d'après la réciproque du théorème de Pythagore Si les résultats sont différents le triangle n'est pas rectangle d'après la contraposée du théorème						
Exemples	Exemples						
<table border="1"> <tr> <td> Soit ABC un triangle rectangle en A, AB = 6 cm et AC = 8 cm. Calculer BC. ABC est un triangle rectangle en A, [BC] est l'hypoténuse, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AC^2 + AB^2$ $BC^2 = 8^2 + 6^2$ $BC^2 = 64 + 36$ $BC^2 = 100$ $BC = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$ </td><td> Soit ABC un triangle rectangle en A, AB = 5 cm et BC = 13 cm. Calculer AC. ABC est un triangle rectangle en A, [BC] est l'hypoténuse, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AC^2 + AB^2$ $13^2 = AC^2 + 5^2$ $169^2 = AC^2 + 5^2$ $AC^2 = 169 - 25$ $AC^2 = 144$ $BC = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$ </td></tr> <tr> <td></td><td> <i>Attention dans ce cas on soustrait.</i> </td></tr> </table>	Soit ABC un triangle rectangle en A, AB = 6 cm et AC = 8 cm. Calculer BC. ABC est un triangle rectangle en A, [BC] est l'hypoténuse, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AC^2 + AB^2$ $BC^2 = 8^2 + 6^2$ $BC^2 = 64 + 36$ $BC^2 = 100$ $BC = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$	Soit ABC un triangle rectangle en A, AB = 5 cm et BC = 13 cm. Calculer AC. ABC est un triangle rectangle en A, [BC] est l'hypoténuse, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AC^2 + AB^2$ $13^2 = AC^2 + 5^2$ $169^2 = AC^2 + 5^2$ $AC^2 = 169 - 25$ $AC^2 = 144$ $BC = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$		<i>Attention dans ce cas on soustrait.</i>	<table border="1"> <tr> <td> Soit ABC le triangle tel que : AB = 4,5 AC = 6 et BC = 7,5 Le triangle ABC est-il rectangle ? Le côté qui a la plus grande longueur est [BC] D'une part $BC^2 = 7,5^2 = 56,25$ D'autre part : $AB^2 + AC^2 = 4,5^2 + 6^2 = 56,25$ Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$ Le triangle ABC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore. </td><td> Soit ABC le triangle tel que : AB = 5 AC = 8 et BC = 7 Le triangle ABC est-il rectangle ? Le côté qui a la plus grande longueur est [AC] D'une part $AC^2 = 8^2 = 64$ D'autre part : $AB^2 + BC^2 = 5^2 + 7^2 = 74 \neq 64$ Donc $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$ Le triangle ABC n'est pas rectangle en A d'après la contraposée du théorème de Pythagore. </td></tr> </table>	Soit ABC le triangle tel que : AB = 4,5 AC = 6 et BC = 7,5 Le triangle ABC est-il rectangle ? Le côté qui a la plus grande longueur est [BC] D'une part $BC^2 = 7,5^2 = 56,25$ D'autre part : $AB^2 + AC^2 = 4,5^2 + 6^2 = 56,25$ Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$ Le triangle ABC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.	Soit ABC le triangle tel que : AB = 5 AC = 8 et BC = 7 Le triangle ABC est-il rectangle ? Le côté qui a la plus grande longueur est [AC] D'une part $AC^2 = 8^2 = 64$ D'autre part : $AB^2 + BC^2 = 5^2 + 7^2 = 74 \neq 64$ Donc $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$ Le triangle ABC n'est pas rectangle en A d'après la contraposée du théorème de Pythagore.
Soit ABC un triangle rectangle en A, AB = 6 cm et AC = 8 cm. Calculer BC. ABC est un triangle rectangle en A, [BC] est l'hypoténuse, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AC^2 + AB^2$ $BC^2 = 8^2 + 6^2$ $BC^2 = 64 + 36$ $BC^2 = 100$ $BC = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$	Soit ABC un triangle rectangle en A, AB = 5 cm et BC = 13 cm. Calculer AC. ABC est un triangle rectangle en A, [BC] est l'hypoténuse, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AC^2 + AB^2$ $13^2 = AC^2 + 5^2$ $169^2 = AC^2 + 5^2$ $AC^2 = 169 - 25$ $AC^2 = 144$ $BC = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$						
	<i>Attention dans ce cas on soustrait.</i>						
Soit ABC le triangle tel que : AB = 4,5 AC = 6 et BC = 7,5 Le triangle ABC est-il rectangle ? Le côté qui a la plus grande longueur est [BC] D'une part $BC^2 = 7,5^2 = 56,25$ D'autre part : $AB^2 + AC^2 = 4,5^2 + 6^2 = 56,25$ Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$ Le triangle ABC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.	Soit ABC le triangle tel que : AB = 5 AC = 8 et BC = 7 Le triangle ABC est-il rectangle ? Le côté qui a la plus grande longueur est [AC] D'une part $AC^2 = 8^2 = 64$ D'autre part : $AB^2 + BC^2 = 5^2 + 7^2 = 74 \neq 64$ Donc $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$ Le triangle ABC n'est pas rectangle en A d'après la contraposée du théorème de Pythagore.						

II) Trigonométrie

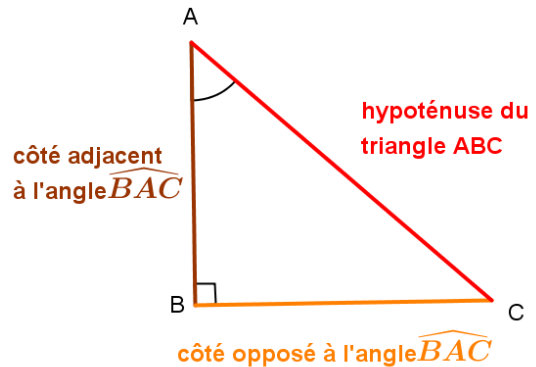
1) Rappel des formules

Dans un triangle rectangle : il faut savoir reconnaître : **Le côté adjacent** à un angle aigu, **le côté opposé** à un angle aigu et **l'hypoténuse** de ce triangle rectangle :

1er cas possible :



2ème cas possible :



cosinus	sinus	tangente
$\cos \widehat{BAC} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{BAC}}{\text{hypoténuse}}$ $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$	$\sin \widehat{BAC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{hypoténuse}}$ $\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$	$\tan \widehat{BAC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{BAC}}$ $\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$
Aide pour retenir les formules : CAHSOHTOA		

2) Méthode d'utilisation des formules trigonométriques

a) On connaît la mesure de l'angle

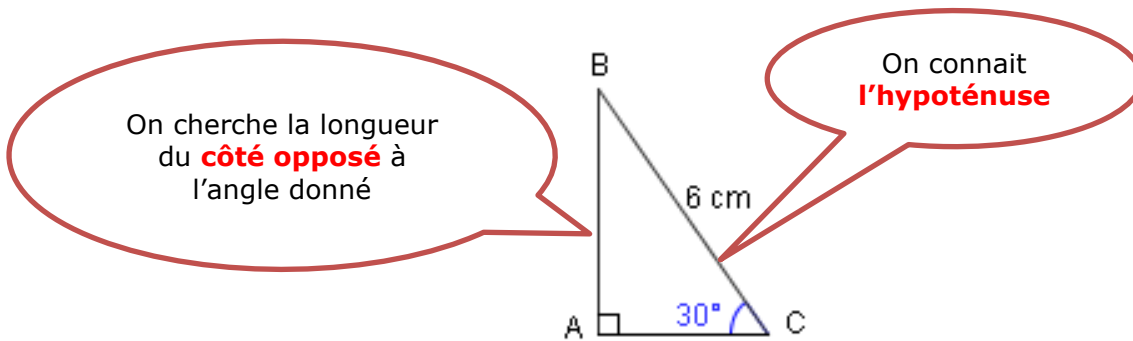
Il faut se poser deux questions pour savoir quelle formule utilisée :

- **Par rapport à l'angle donné** quel est le côté dont **la longueur est connue** ?
- **Par rapport à l'angle donné** quel est le **côté cherché** ?

La réponse à ces deux questions vous donnera la solution.

Exemple : Si la réponse à la 1^{ère} question est : **côté adjacent** et la réponse à la 2^{ème} question est **hypoténuse** alors on utilise la formule du **COSINUS** car c'est la seule formule où apparaît le nom de côté adjacent et hypoténuse

Exemple : Dans le triangle ci-dessous calculer AB.



La seule formule où apparaît côté opposé et hypoténuse est le sinus

Réponse : Dans le triangle ABC rectangle en A on a : $\sin \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC}$
 $\sin 30^\circ = \frac{AB}{6}$ donc $AB = 6 \times \sin 30^\circ = 6 \times 0,5 = 3 \text{ cm}$ donc **AB = 3 cm**

b) On cherche la mesure de l'angle

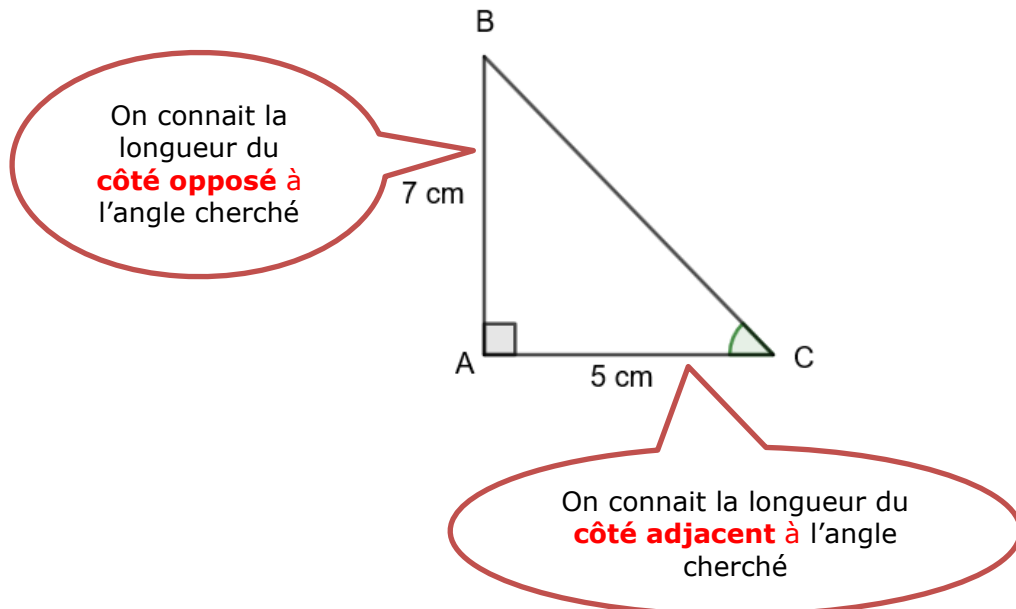
Il faut se poser deux questions pour savoir quelle formule utilisée :

- **Par rapport à l'angle cherché** quel est le côté dont **la longueur est connue** ?
- **Par rapport à l'angle cherché** quel est **l'autre longueur du côté connue** ?

La réponse à ces deux questions vous donnera la solution.

Exemple : Si la réponse à la 1^{ère} question est : **côté adjacent** et la réponse à la 2^{ème} question est **hypoténuse** alors on utilise la formule du **COSINUS** car c'est la seule formule où apparaît le nom de côté adjacent et hypoténuse.

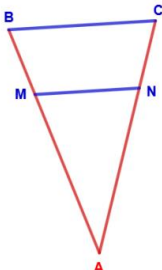
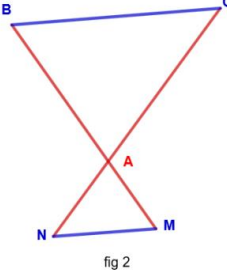
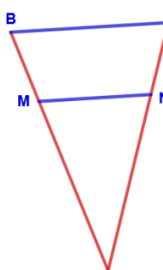
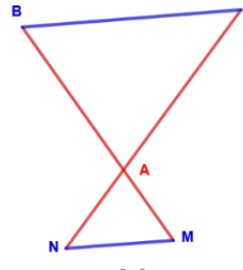
Exemple Dans le triangle ci-dessous calculer l'angle $\widehat{BCA}$



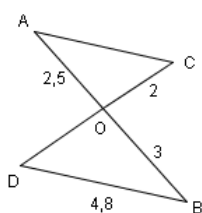
La seule formule où apparaît côté opposé et côté adjacent est la tangente

Réponse : Dans le triangle ABC rectangle en A on a : $\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC}$
 $\tan \widehat{BCA} = \frac{7}{5} = 1,4$. On a donc **$\widehat{BCA} = 54,5^\circ$**

III) Théorème de Thalès

Calculer une longueur :	Prouver que deux droites sont parallèles ou pas :
Théorème de Thalès	Réciproque du théorème de Thalès (si les droites sont parallèles) ou sa contraposée (si elles ne le sont pas)
 fig 1  fig 2 (• Si $A \in (MB)$ et $A \in (NC)$ • Si $(MN) \parallel (BC)$ Alors d'après le théorème de Thalès : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$	 fig 1 On vérifie que $M \in [AB]$ et $N \in (NC)$ ou  fig 2 On vérifie que $A \in [BM]$ et $A \in [CN]$ puis • On calcule d'une part $\frac{AM}{AB}$ et d'autre part $\frac{AN}{AC}$ Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ Alors $(MN) \parallel (BC)$ d'après la réciproque du théorème de Thalès Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ Alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles d'après la contraposée du théorème de Thalès

Exemples



On sait que les droites (AC) et (DB) sont parallèles.
On donne $OA = 2,5$ cm ; $OB = 3$ cm ;
 $OC = 2$ cm et $DB = 4,8$ cm

Calculer OD et AC
Dans les triangles OAC et ODB :

- $O \in [AB]$
- $O \in [DC]$
- $(AC) \parallel (BD)$

On peut donc appliquer le théorème de Thalès :

On écrit l'égalité des rapports :

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{BD}{AC}$$

On utilise les données numériques
 $\frac{3}{2,5} = \frac{OD}{2} = \frac{4,8}{AC}$

$$\frac{3}{2,5} = \frac{OD}{2} \text{ on déduit}$$

$$OD = \frac{3 \times 2}{2,5} = 2,4$$

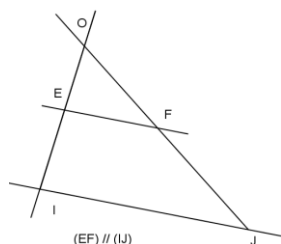
donc

$$OD = 2,4 \text{ cm}$$

$$\frac{3}{2,5} = \frac{4,8}{AC} \text{ on en déduit}$$

$$OD = \frac{4,8 \times 2,5}{3} = 4$$

donc $AC = 4$ cm



On sait que les droites (EF) et (IJ) sont parallèles.

On donne $EF = 6$ cm ; $IJ = 8$ cm ;
 $OE = 2,4$ cm et $OJ = 4,8$ cm

Calculer OI et OF
Dans les triangles OEF et OIJ :

- $E \in [OI]$
- $F \in [OJ]$
- $(EF) \parallel (IJ)$

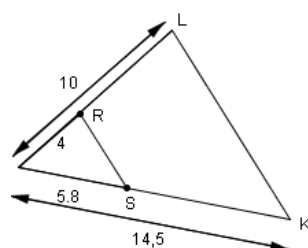
On peut donc appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{OE}{OI} = \frac{OF}{OJ} = \frac{EF}{IJ}$$

On utilise les données numériques :

$$\frac{2,4}{OI} = \frac{OF}{4,8} = \frac{6}{8}$$

Exemples



$EL = 10$ cm ; $ER = 4$ cm
 $ES = 5,8$ cm et $EK = 14,5$ cm.

Montrer que les droites (RS) et (LK) sont parallèles.

- On vérifie d'abord que les points E, R, L et E, S, K sont alignés dans le même ordre : Pour cela il suffit d'écrire :

$R \in [EL]$ et $S \in [EK]$

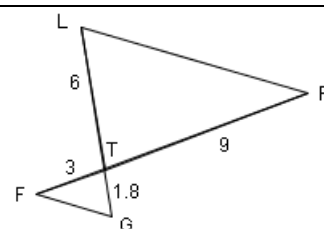
- On calcule $\frac{ER}{EL}$ et $\frac{ES}{EK}$ •

$$\text{Donc } \frac{ER}{EL} = \frac{ES}{EK}$$

- puis on les compare.

$$\left. \begin{aligned} \frac{ER}{EL} &= \frac{4}{10} = 0,4 \\ \frac{ES}{EK} &= \frac{5,8}{14,5} = 0,4 \end{aligned} \right\}$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (SR) et (KL) sont parallèles



$TF = 3$ cm, $TP = 9$ cm
 $TG = 1,8$ cm et $TL = 6$ cm

Les droites (LP) et (FG) sont-elles parallèles ?

- $T \in [GL]$ et $T \in [FP]$

- On calcule $\frac{TF}{TP}$ et $\frac{TG}{TL}$, puis on les compare.

$$\frac{TP}{TF} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{TL}{TG} = \frac{6}{1,8} = \frac{60}{18} = \frac{20}{6} \approx 3,3333...$$

$$\text{Conclusion : } \frac{TP}{TF} \neq \frac{TL}{TG}$$

Les droites (FG) et (LP) ne sont pas parallèles.

Car si les droites (FG) et (LP) étaient parallèles alors on

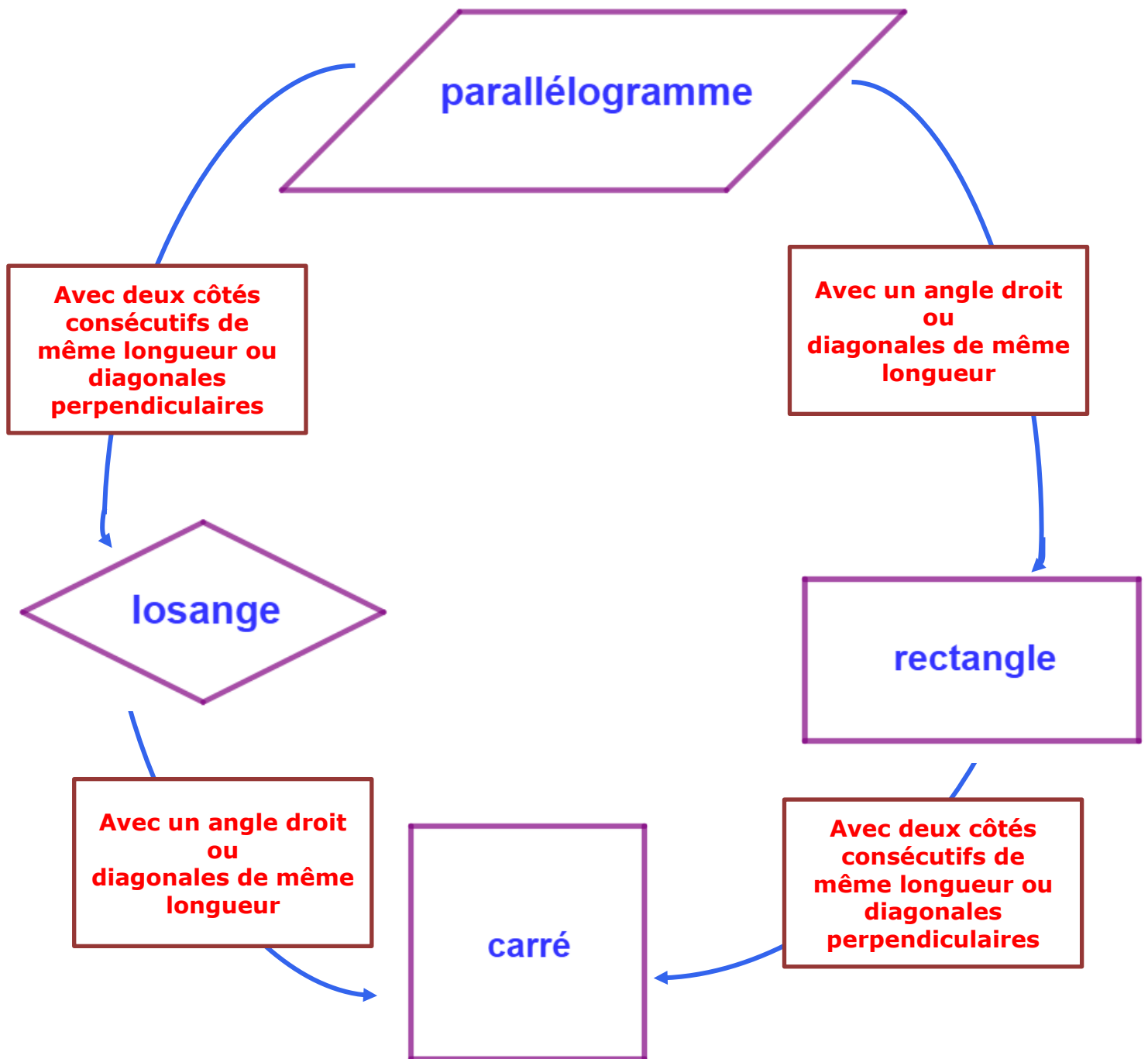
$$\text{aurait } \frac{TP}{TF} = \frac{TL}{TG},$$

ce qui n'est pas le cas (Ce type de raisonnement s'appelle la contraposée du théorème)

Remarque :

A vue d'œil les droites semblent parallèles car la différence des rapports n'est que de 0,333...

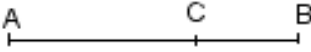
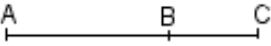
IV) Les quadrilatères



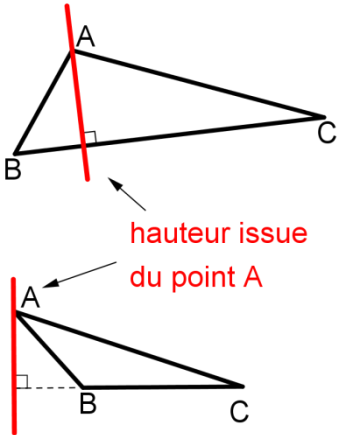
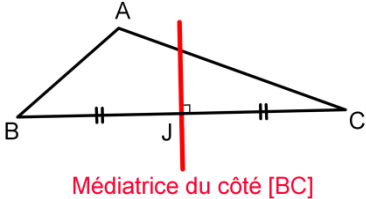
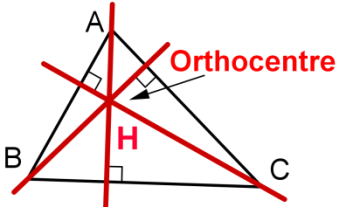
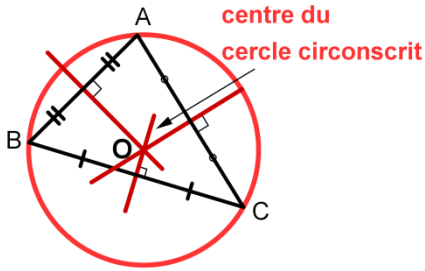
V) Les triangles

1) Inégalité triangulaire

Si A, B et C sont trois points quelconques on a toujours $AB + BC \geq AC$

$B \notin [AC]$ alors	$AB + BC > AC$	 
$B \in [AC]$ alors :	$AB + BC = AC$	

2) Hauteurs et médiatrices

	Hauteurs	Médiatrices
Définition :	Une hauteur d'un triangle est une droite passant par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet 	La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment passant par son milieu 
Propriétés :	Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes : elles ont un point commun appelé l'orthocentre 	Le point d'intersection des trois médiatrices d'un triangle est le centre du cercle circonscrit à ce triangle. 

3) Triangle rectangle inscrit dans un cercle

Un triangle est rectangle si et seulement si le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

