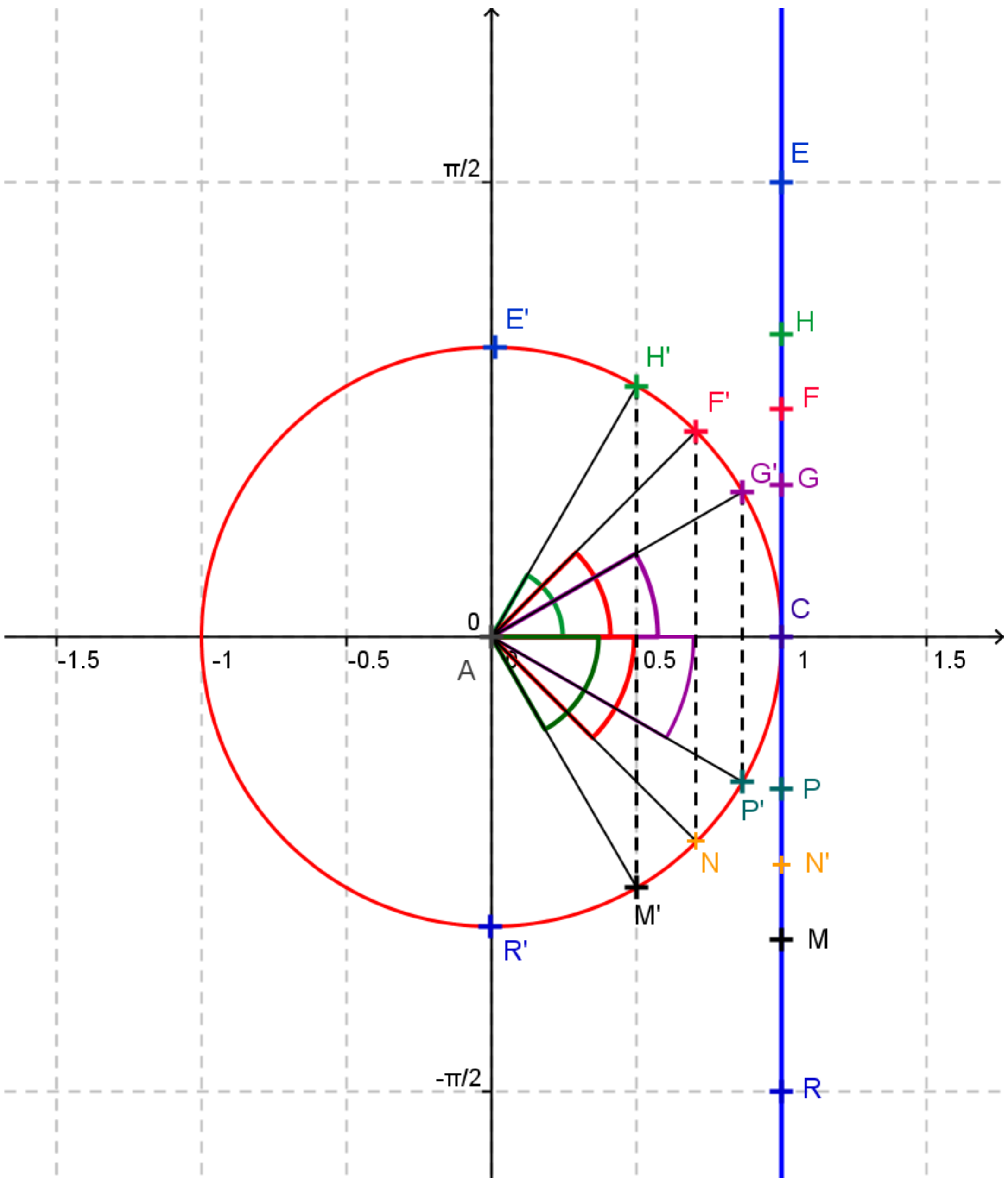
Trigonométrie

I) Introduction

On peut faire plusieurs liens entre droites et cercles mais aucune façon de le faire n'est vraiment simple. En fait l'une des difficultés pour faire le lien se cache dans le nombre π.

1) Celui qui est à connaître en classe de seconde : l'enroulement



Dans le schéma ci-dessus, on peut, par l'imagination, coller le segment bleu au cercle rouge. Les points G, F, H et E viendront respectivement se confondre avec les points G', F', H' et E', de sorte que l'on obtient les égalités de distances: CG=CG', CH=CH' ; CF=CF' et CE=CE'.

De même les points P, N, M et R viendront respectivement se confondre avec les points P', N', M' et R', de sorte que l'on obtient les égalités de distances: CP=CP', CN=CN' ; CM=CM' et CR=CR''.

Aux points C, G, F, H, E on peut donc associer respectivement :

- Le point C, **l'angle nul** et C est **d'abscisse 1.**
- Le point G', l'angle ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AG'}}$) de mesure égale à **30°** et l'abscisse de G' qui est environ 0,85.
- Le point F', l'angle ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AF'}}$) de mesure égale à **45°** et l'abscisse de F' qui est environ 0,71.
- Le point H', l'angle ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AH'}}$) de mesure égale à **60°** et l'abscisse de H' qui est environ 0,50.
- Le point E', l'angle ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AE'}}$) de mesure égale à **90°** et l'abscisse de E' qui est **0**.

De même aux points P, N, M et R on peut donc associer respectivement :

- Le point P', l'angle ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AP'}}$) de mesure égale à **-30°**et l'abscisse de P' qui est environ 0,85.
- Le point N', l'angle ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AN'}}$) de mesure égale à **-45°**et l'abscisse de N' qui est environ 0,71.
- Le point M', l'angle ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AM'}}$) de mesure égale à **-60°** et l'abscisse de M' qui est environ 0,50.
- Le point R', l'angle ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AR'}}$) de mesure égale à **-90°**et l'abscisse de R' qui est **0.**

a) Mesure des angles.

On peut utiliser les ordonnées de G, H, F ,E et aussi de P, N, M et R comme mesures respectivement des angles ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AG'}}$), ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AH'}}$), ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AF'}}$), ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AE'}}$) ainsi que des angles ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AP'}}$), ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AN'}}$), ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AM'}}$), ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AR'}}$)
On parle d'angles mesurés en radians.

Exemples :

Ainsi l'angle ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AE'}}$) a une mesure en radians qui est $\frac{\pi}{2}$ et l'angle ($\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AM'}}$) a une mesure en radians qui est - $\frac{\pi}{3}$

b) Différentes mesures pour un même angle

Si on poursuit « l'enroulement » de la droite sur le cercle, plusieurs points de cette droite vont venir s'appliquer sur le même point du cercle. Les points de la droite qui s'appliquent sur un même point du cercle ont des ordonnées dont la différence est
Le périmètre du cercle vaut 2π puisque son rayon vaut 1.
Donc si x est l'ordonnée d'un point B de la droite qui s'applique sur le point B' du cercle, alors les points B_1 , B_2 , B_3 , ... B_k de la droite d'ordonnées respectives
$x + 2\pi$, $x + 4\pi$, $x - 2\pi$, ... , $x + k \times 2\pi$ (où k est un nombre entier relatif) s'appliqueront aussi sur B'.
Ainsi un même angle possède plusieurs mesures en radians.

Si en radians l'angle ($\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}$) possède pour mesure x, il possède aussi pour mesure tous les nombres qui peuvent s'écrire $x + k \times 2\pi$ (où k est un nombre entier relatif).

Exemple :

Soit l'angle ($\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}$) ayant pour mesure $\frac{3\pi}{5}$ alors il possède aussi pour mesures
$\frac{13\pi}{5}$ ($\frac{3\pi}{5} + 2\pi$), - $\frac{7\pi}{5}$ ($\frac{3\pi}{5} - 2\pi$) ou encore $\frac{103\,\pi}{5}$ ($\frac{3\pi}{5} + 10 \times 2\pi$)

c) Mesure principale

On démontre que parmi toutes les mesures associées à un même angle , il en existe une seule appartenant à l'intervalle $] -\pi \,;\, \pi]$.
On l'appelle mesure principale de l'angle.

Exemple :

Soit $x = \frac{243\,\pi}{7}$ une mesure d'angle. On a $x = 34\pi + \frac{5\pi}{7}$ avec 34π de la forme $k \times 2\pi$ ($k = 17$) et $\frac{5\pi}{7} \in] -\pi \,;\, \pi]$ donc cet angle a pour mesure principale $\frac{5\pi}{7}$

d) Cosinus et sinus

Définition :

Soit x un nombre réel. Soit M le point situé sur la droite (CG) dont l'ordonnée est x. On lui associe l'abscisse du point M' correspondant, appelé le cosinus de x et notée $\cos(x)$. On appelle sinus de x l'ordonnée du point M' et on la note $\sin(x)$.

e)Valeurs à connaître et tableau de correspondances

x mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x mesure en degrés	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Valeur de cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Valeur de sin$x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

f) Première formules de trigonométrie

Le cercle rouge, dans le dessin ci-dessus, s'appelle cercle trigonométrique. Son centre est l'origine du repère et son rayon est 1.

On constate que le cercle est invariant par symétrie centrale, par symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses, par symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées et par symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Enfin, constatons qu'après enroulement d'un tour autour du cercle trigonométrique, on retrouve les mêmes points qu'au tour d'avant.

On en déduit les formules suivantes, respectivement:

$$sin(\pi + x) = -sin(x)$$
$$cos(\pi + x) = -cos(x)$$

$$sin(-x) = -sin(x)$$
$$cos(-x) = cos(x)$$

$$sin(\pi - x) = sin(x)$$
$$cos(\pi - x) = -cos(x)$$

$$sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos(x)$$
$$cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin(x)$$

$$sin(2\pi + x) = sin(x)$$
$$cos(2\pi + x) = cos(x)$$

Exemple : On peut, grâce à ces formules, calculer des sinus et cosinus correspondant à des angles obtenus à la suite de nombreux enroulements de la droite (CG) autour du cercle. Calculons par exemple :

$$\cos\left(\frac{2192\pi}{3}\right)$$

Or $2192 = 3 \times 732 - 4$ donc on calcule $\cos\left(732\pi - \frac{4\pi}{3}\right)$ or $732\pi = 366 \times 2\pi$. Ce qui signifie que la droite (CG) s'est enroulée de 366 tours, pour revenir sur elle-même, donc, en vertu de la 10ème formule ci-dessus, on a :

$$\cos\left(\frac{2192\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right)$$

Mais, en vertu de la 4ème formule :

$$\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

Et, avec la 2ème formule :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

g) Trigonométrie

On appelle trigonométrie cette partie du cours de mathématiques parce que ces notions permettent d'effectuer des calculs de longueurs dans les triangles.

Constatons que le triangle AG'R est rectangle en R. On a les formules, vues en classe de troisième :

$$\mathrm{AR} = \mathrm{AG}'\cos(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{RG}' = \mathrm{AG}'\sin(x) = \sin(x)$$

où x désigne la mesure (en degrés ou en radians) de l'angle $(\overrightarrow{\mathbf{AR}}, \overrightarrow{\mathbf{AG'}})$ et où on tient compte du fait que le rayon du cercle trigonométrique, AG', vaut 1.

Ces formules sont faciles à retenir sous la forme :

$$\cos x = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } x}{\text{longueur de l'hypothénuse}} \qquad \sin x = \frac{\text{longueur du côté opposé à } x}{\text{longueur de l'hypothénuse}}$$

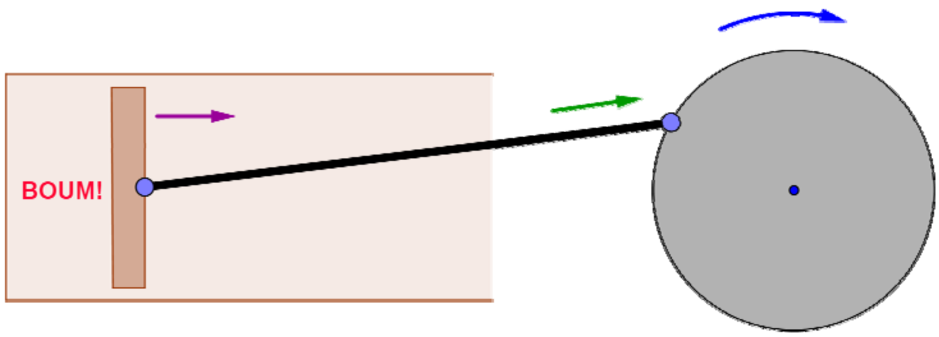
Relation de Pythagore : Dans le triangle AG'R qui est rectangle en R, la relation de Pythagore $\mathrm{AR}^2 + \mathrm{RG}'^2 = \mathrm{AG}'^2$ se réécrit sous la forme :

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

2) Le piston, la bielle et le vilebrequin : une histoire de mécanicien

Que ce soit le piston dans le cylindre du moteur de l'automobile ou de la locomotive à vapeur ou bien la jambe du cycliste qui appuie sur les pédales, le problème est le même : il s'agit de transformer un mouvement rectiligne (piston dans le cylindre ou genou du cycliste) en un mouvement circulaire (vilebrequin dans un moteur ou pieds et pédalier du cycliste).

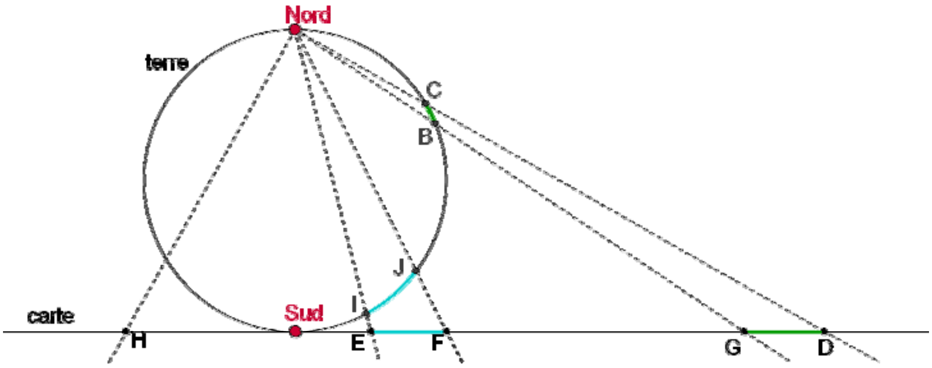
Dans les deux cas, moteur ou cycliste, un organe de transmission articulé, la bielle ou le tibia, permet le transfert de mouvement rectiligne au mouvement circulaire.



Lors de l'explosion de l'essence dans le cylindre, le piston se déplace (flèche mauve). Son mouvement, contraint par le cylindre, est rectiligne.
Le piston pousse la bielle dont le déplacement (flèche verte) entraîne celui du vilebrequin (flèche bleue).

3) Projection stéréographique et cartographie

Le principe expliqué ci-dessous permet – théoriquement – d'établir à partir d'une mappemonde une carte plane de la Terre. On explique le principe analogue à partir du dessin d'un cercle, dont la « carte » est alors dessinée sur une droite.



On trace la droite (Nord C) qui coupe la « carte » au point D.

La région terrestre constituée par l'arc $\overset{\frown}{BC}$ est cartographiée sous forme d'un segment [GD].
C'est la même chose pour la région IJ cartographiée en [EF].
Pourtant, EF=GD !!! Cette égalité de distance n'est pas vérifiée pour les régions correspondantes sur la terre ! Cette cartographie, construite à partir du pôle Nord, ne donne de bonnes cartes que des régions du pôle Sud.