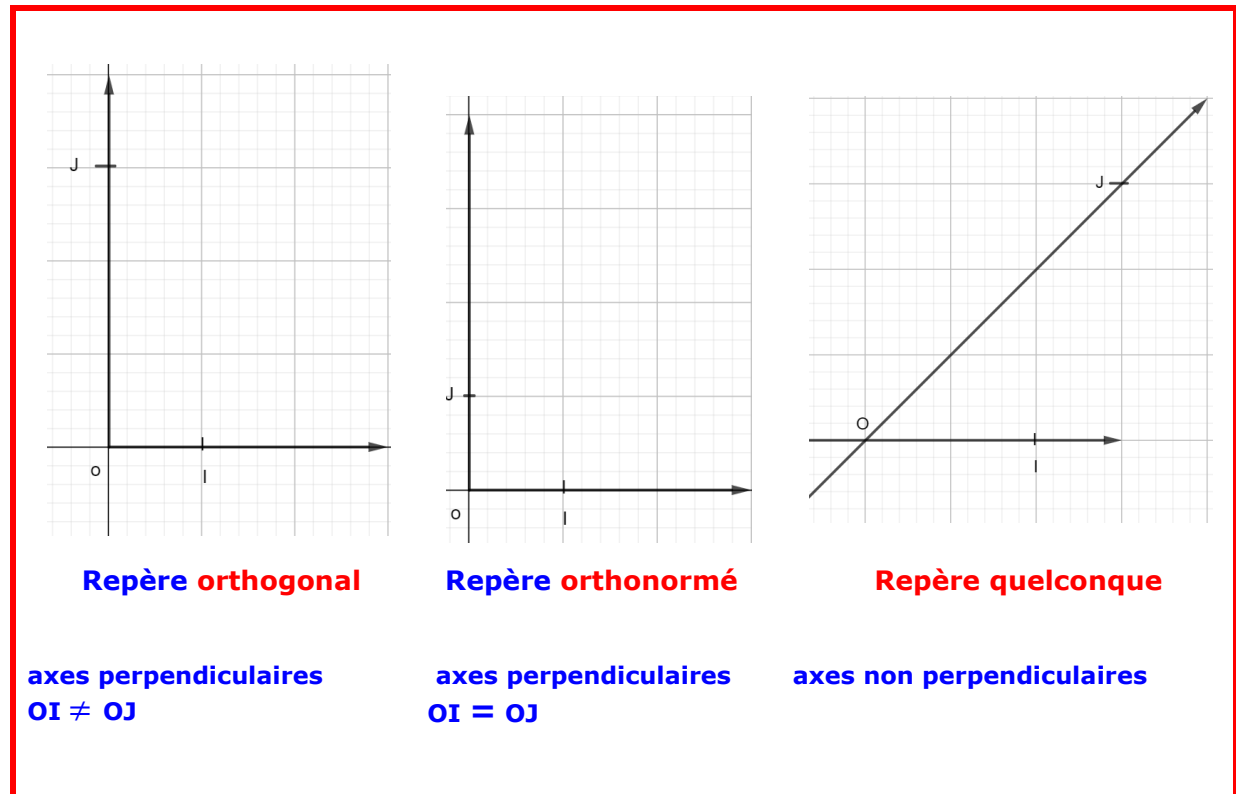


# Vecteur dans un repère du plan. Milieu. Distance. Colinéarité.

## I) Repère orthonormé et base orthonormée

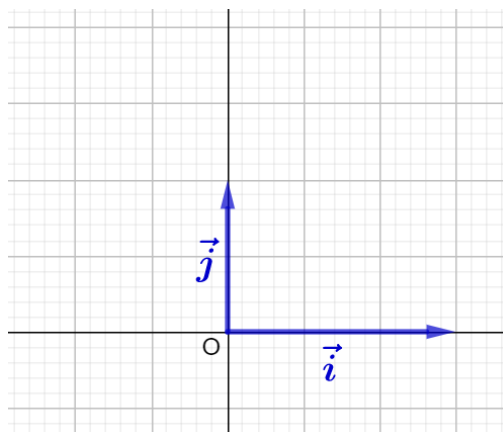
### 1) Repères



On note le repère  $(O, I, J)$  avec :

- O : centre du repère
- I : 1 unité sur l'axe des abscisses
- J : 1 unité sur l'axe des ordonnées

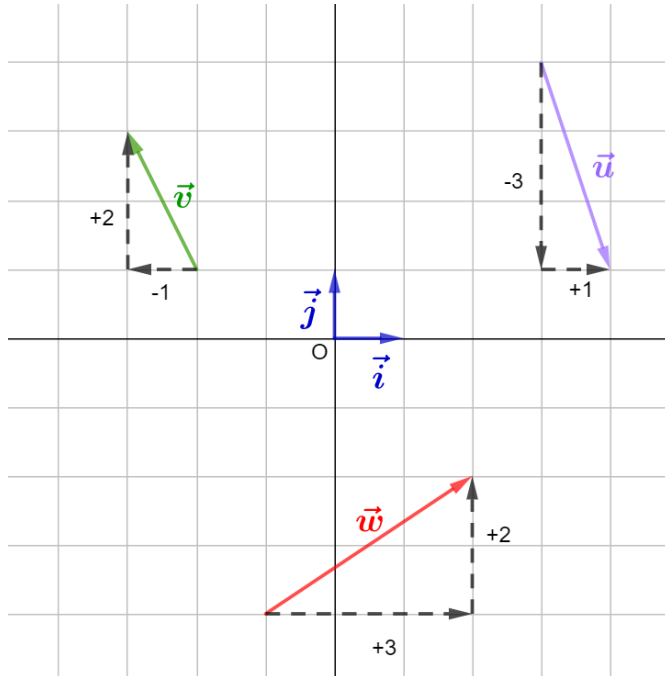
On pose :  $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$  et  $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ , Désormais nous pouvons noter le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$



## II) Coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé

### 1) Lecture graphique

**Exemple :** Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  ;  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$



$$\vec{u} = (1 ; -3) \text{ ou } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = (-1 ; 2) \text{ ou } \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = (3 ; 2) \text{ ou } \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soit  $\vec{u} = (x ; y)$ , on peut noter dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

**Exemple :** reprenons les vecteurs  $\vec{u}$  ;  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'exemple précédent,

$$\vec{u} = (1 ; -3) \text{ peut s'écrire } \vec{u} = 1\vec{i} - 3\vec{j} = \vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\vec{v} = (-1 ; 2) \text{ peut s'écrire } \vec{v} = -1\vec{i} + 2\vec{j} = -\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{w} = (3 ; 2) \text{ peut s'écrire } \vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

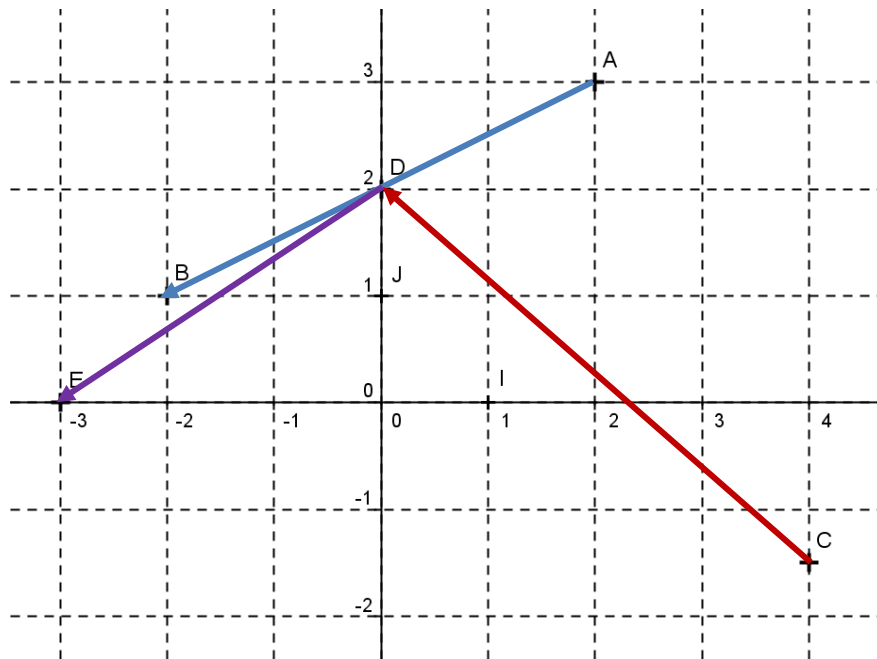
### 2) Coordonnées d'un vecteur à partir de deux points

**Propriété :**

**Dans un repère, on considère les points  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$ .**

**Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont :**  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

### Exemple :



Sur la figure ci-dessus les points A, B, C, D et E ont pour coordonnées :

$$A ( 2 ; 3 )$$

$$B ( - 2 ; 1 )$$

$$C ( 4 ; -1,5 )$$

$$D ( 0 ; 2 )$$

$$E ( - 3 ; 0 )$$

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 4 \\ 2 - (-1,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -4 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 0 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier graphiquement ses résultats.

**Remarque :** Le vecteur nul a pour coordonnées (0 ; 0)

### 3) vecteurs égaux

Deux vecteurs sont **égaux** si, et seulement si, ils ont les **mêmes coordonnées** dans un repère.  
C'est à dire, dans un repère les vecteurs  $\vec{u} (x ; y)$  et  $\vec{v} (x' ; y')$  sont égaux si, et seulement si,  $x = x'$  et  $y = y'$

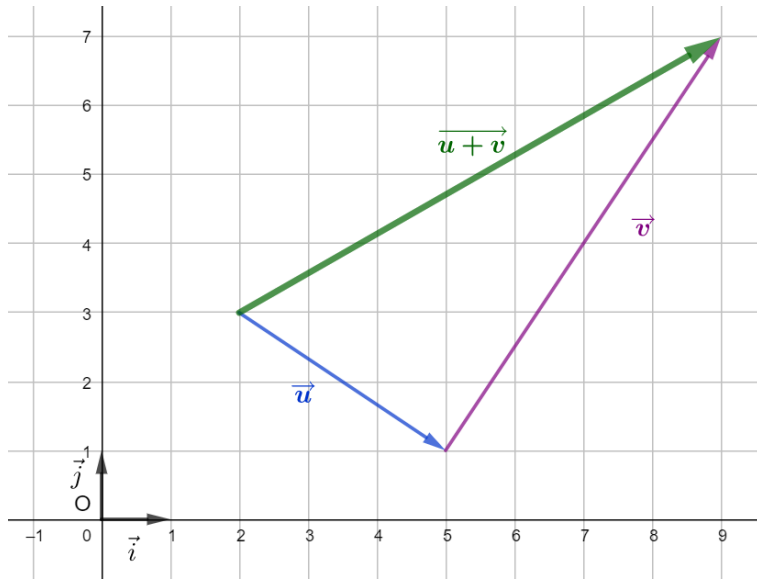
## 4) Somme de vecteurs

Dans un repère, on donne les vecteurs  $\vec{u} (x ; y)$  et  $\vec{v} (x' ; y')$   
Alors les coordonnées du vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  sont  $(x + x' ; y + y')$

### Exemple :

Dans un repère on considère  $\vec{u} (3 ; -2)$  et  $\vec{v} (4 ; 6)$

Alors  $\vec{u} + \vec{v} (3 + 4 ; -2 + 6)$  d'où  $\vec{u} + \vec{v} (7 ; 4)$



### Démonstration :

Dans un repère d'origine O, la translation de vecteur  $\vec{u}(x ; y)$  associe au point O le point M( x ; y ), la translation de vecteur  $\vec{v} ( x' ; y')$  associe au point M le point N.

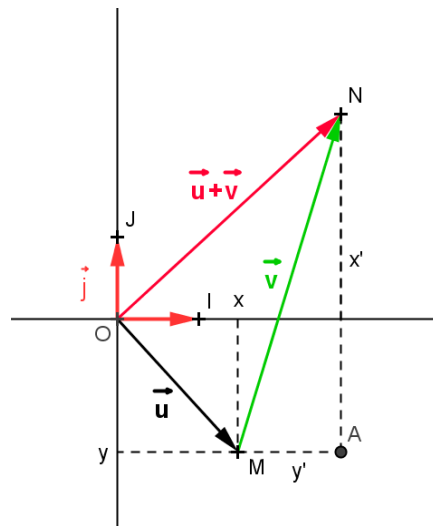
Alors  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{ON}$  on cherche donc les coordonnées du point N

les coordonnées de  $\vec{MN}$  sont  
 $(x_N - x ; y_N - y)$

Or  $\vec{MN} = \vec{v}$

donc  $x' = x_N - x$  et  $y' = y_N - y$

d'où  $\vec{u} + \vec{v} (x' + x ; y' + y)$



## 5) Produit d'un vecteur par un réel

$k$  est un réel et  $\vec{u} (x ; y)$  est un vecteur dans un repère.

Le vecteur  $k\vec{u}$  est le vecteur de coordonnées  $(kx ; ky)$

### Exemple :

Sur la figure ci-dessus on a  $\vec{u}$   
 $= \vec{OA}$  et  $\vec{OA} (2 ; -1)$

$\vec{BC} (4 ; -2)$  donc

$\vec{BC} (2 \times 2 ; 2 \times (-1)) ; \vec{BC} = 2 \vec{u}$

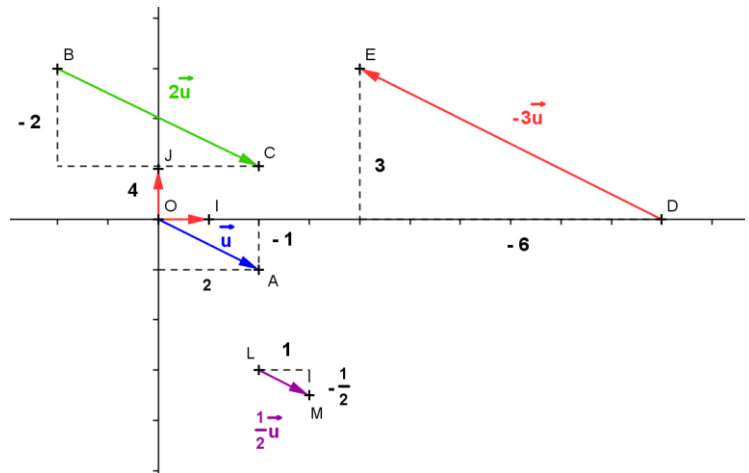
$\vec{DE} (-6 ; 3)$  donc

$\vec{DE} (-3 \times 2 ; -3 \times (-1)) ;$

$\vec{DE} = -3 \vec{u}$

$\vec{LM} (1 ; -\frac{1}{2})$  donc

$\vec{LM} (\frac{1}{2} \times 2 ; \frac{1}{2} \times (-1)) \vec{LM} = \frac{1}{2} \vec{u}$



### III) Coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère orthonormé on considère les points A ( $x_A ; y_A$ ) et B ( $x_B ; y_B$ )

Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées ( $x_I ; y_I$ ) avec :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

#### Exemples :

1) Dans un repère orthonormé, on considère les points A (3 ; 5) et B (3 ; -2) soit J le milieu de [AB]

$$\text{Alors } x_J = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3 \quad \text{et} \quad y_J = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + (-2)}{2} = \frac{3}{2}$$

2) Dans un repère orthonormé on considère les points A (1 ; -2) et B (4 ; 4) soit I le milieu de [AB]

$$\text{Alors } x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 4}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

### IV) Distance AB et norme d'un vecteur

#### 1) Calcul de la distance AB

Dans un repère orthonormé on considère les points A( $x_A ; y_A$ ) B( $x_B ; y_B$ ) .

La distance entre les points A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

### Démonstration :

On suppose comme sur la figure ci-contre que  $x_B \geq x_A$  et  $y_B \geq y_A$

Soit C le point tel que  $x_C = x_B$  et  $y_C = y_A$

Le triangle ABC est rectangle en C

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC on peut écrire :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

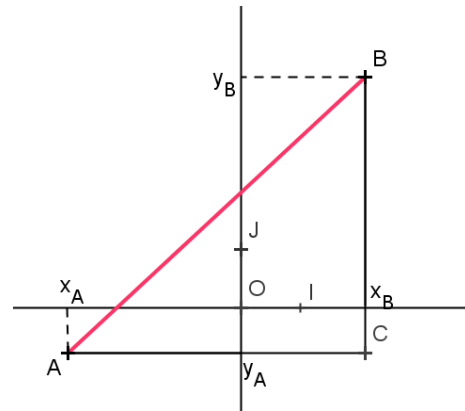
$$\text{Comme } AC = x_C - x_A = x_B - x_A$$

$$\text{et } BC = y_B - y_C = y_B - y_A$$

$$\text{on a : } AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

et comme AB est positif

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



### Exemple :

Dans un repère orthonormé on donne A (- 2 ; 3) et B (1 ; 5)

$$AB = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

## 2) Norme d'un vecteur

Dans un repère orthonormé on considère les points  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$  et  $\vec{u}(x; y)$ .

La norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  se note  $\|\overrightarrow{AB}\|$  et, est égale à la distance AB :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

La norme du vecteur  $\vec{u}$  se note  $\|\vec{u}\|$  et est égale à :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Exemple 1 :** Dans un repère orthonormé Les coordonnées des points A et B sont A (- 2 ; 3) et B (1 ; 5). La norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

**Exemple 2 :** Dans un repère orthonormé les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  sont  $\vec{u}(4; 3)$ . La norme du vecteur  $\vec{u}$  est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\|\vec{u}\| = 5$$

## V) Déterminant de deux vecteurs et vecteurs colinéaires

### 1) Déterminant de deux vecteurs

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan. Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont pour coordonnées respectives dans ce plan :  $\vec{u} (x ; y)$  et  $\vec{v} (x' ; y')$ .

Le nombre  $xy' - x'y$  est appelé **déterminant** des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans ce repère.

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

**Exemple :** Dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont pour coordonnées respectives dans ce plan :  $\vec{u} (4 ; 5)$  et  $\vec{v} (-2 ; 1)$

Le déterminant des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le nombre :

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 + 5 \times (-2) = 4 - 10 = -6$$

**Le déterminant de ces deux vecteurs est -6**

### 2) Vecteurs colinéaires

#### a) Définition

Deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires** si, et seulement si, il existe un nombre réel  $k$  tel que  $\vec{v} = k \vec{u}$ .

Le vecteur nul  $\vec{0}$  est colinéaire à tous les vecteurs.

**Exemples :** Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan. Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont pour coordonnées respectives dans ce plan :

**1)** Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan. Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont pour coordonnées respectives dans ce plan :

$\vec{u} (2 ; -3)$  et  $\vec{v} (10 ; -15)$  sont colinéaires en effet :

$$10 = 2 \times 5 \text{ et } -15 = -3 \times 5$$

$$\text{donc } \vec{v} = 5 \vec{u}$$

**2)** Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan. Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont pour coordonnées respectives dans ce plan :

$$\vec{u} \left( \frac{1}{3} ; -\frac{3}{5} \right) \text{ et } \vec{v} \left( \frac{2}{9} ; -\frac{1}{5} \right) \text{ sont colinéaires en effet } \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \text{ et } -\frac{1}{5} = \frac{1}{3} \times \left( -\frac{3}{5} \right)$$

donc  $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u}$

3)  $\vec{u} (4 ; 5)$  et  $\vec{v} (8 ; -10)$  ne sont pas colinéaires en effet  $8 = 4 \times 2$  mais  $-10 \neq 5 \times 2$

### **b) Propriété : Vecteurs colinéaires et déterminant**

**Dans un repère, on donne les vecteurs  $\vec{u} (x ; y)$  et  $\vec{v} (x' ; y')$**

**Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, si, et seulement si leur déterminant est nul c'est à dire si et seulement si  $x y' - y x' = 0$**

#### **Exemples :**

a)  $\vec{u} (2 ; -3)$  et  $\vec{v} (10 ; -15)$  sont-ils colinéaires?

**Réponse :**  $2 \times (-15) - (-3) \times 10 = -30 + 30 = 0$   $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont donc colinéaires.

b)  $\vec{u} (7 ; -4)$  et  $\vec{v} (14 ; 8)$  sont-ils colinéaires?

**Réponse :**  $7 \times 8 - (-4) \times 14 = 56 - (-56) = 56 + 56 = 112 \neq 0$   
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont donc pas colinéaires.

### **c) Propriétés**

- **Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.**
- **Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.**

#### **Exemples :**

1) Soit les points A (1 ; -2), B (4 ; 3) et C (10 ; 13).

Pour savoir s'ils sont alignés on calcule les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  :

$$\overrightarrow{AB} (4 - 1 ; 3 - (-2)) \quad \overrightarrow{AB} (3 ; 5)$$

$$\overrightarrow{AC} (10 - 1 ; 13 - (-2)) \quad \overrightarrow{AC} (9 ; 15)$$

**Il est clair que  $\overrightarrow{AC} = 3 \overrightarrow{AB}$  donc les points sont alignés.**

2) Soit les points A (1 ; 3), B (5 ; 2), C (6 ; 5) et D (10 ; -2).

Pour savoir si les droites (AB) et (CD) sont parallèles on calcule les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB} (5 - 1 ; 2 - 3) \quad \overrightarrow{AB} (4 ; -1)$$

$$\overrightarrow{CD} (10 - 6 ; -2 - 5) \quad \overrightarrow{CD} (4 ; -7)$$

Le déterminant des deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  est  $4 \times (-7) - (-1) \times 6 = -28 + 6 = -22 \neq 0$

**Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  ne sont pas colinéaires, les droites ne sont donc pas parallèles.**