

Vecteurs. Vecteurs égaux. Somme de vecteurs

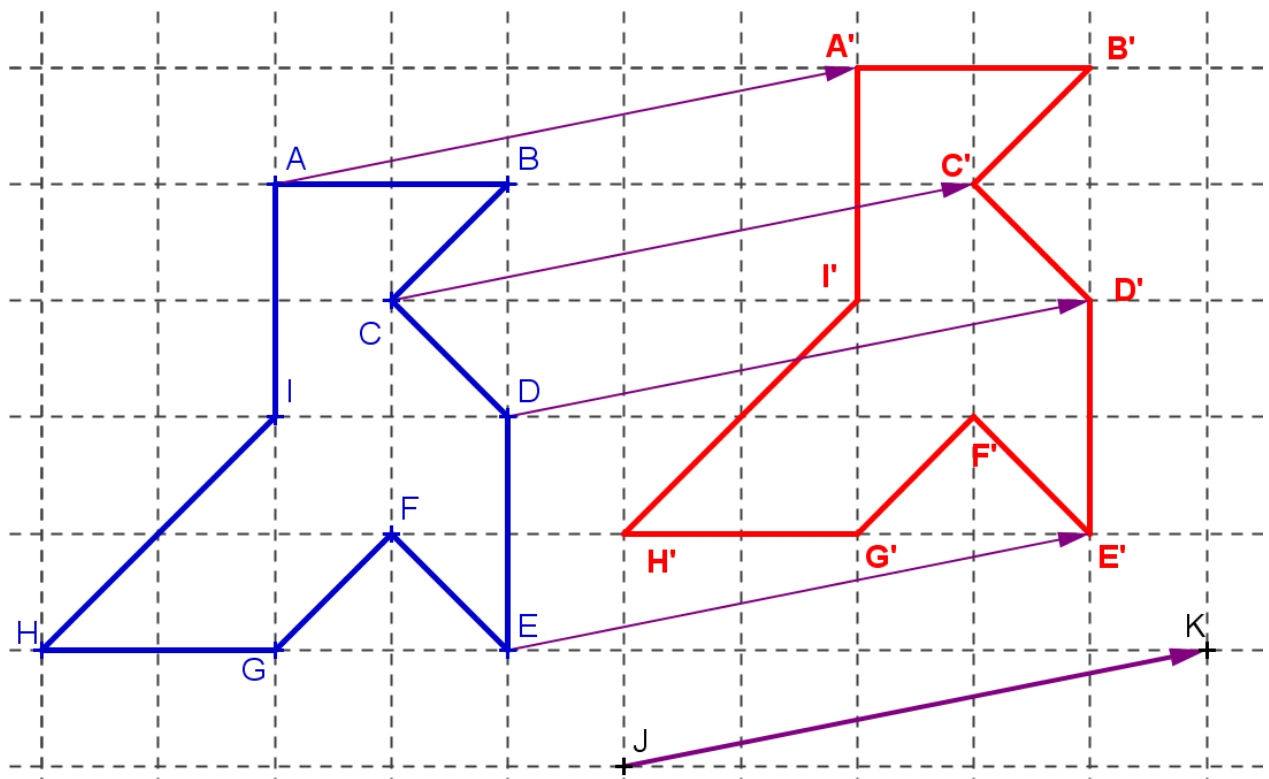
I) Vecteur et translation

1) Définition

Transformer une figure par translation revient à la faire glisser (c'est à dire la déplacer sans la tourner, sans la déformer, ni l'agrandir ou la réduire).

Ce déplacement est défini par :

- Une direction : la droite (JK)
- Un sens : de J vers K
- Une longueur : la longueur du segment [JK]



Le déplacement est donné par $\overrightarrow{JK}$. Chaque point de la figure est déplacé de la même manière.

Cette translation qui transforme J en K est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{JK}$.

Ainsi on définit un nouvel objet le vecteur $\overrightarrow{JK}$ qui a :

une direction : celle de la droite (JK) ;

un sens : de J vers K

et une longueur ou norme : la longueur du segment [JK].

J est l'origine et K l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{JK}$.

Remarque : Si J et K sont confondus alors le vecteur défini est le vecteur nul. Le vecteur nul noté $\vec{0}$ ne possède ni direction, ni sens et sa norme est nulle.

Exemples :

La translation qui transforme	est la translation de vecteur	le vecteur a pour direction	le vecteur a pour sens	le vecteur a pour longueur
C en D	$\overrightarrow{CD}$	celle de la droite (CD)	de C vers D	CD
E en H	$\overrightarrow{EH}$	celle de la droite (EH)	de E vers H	EH
B en A	$\overrightarrow{BA}$	celle de la droite (AB)	de B vers A	AB

II) Vecteurs égaux

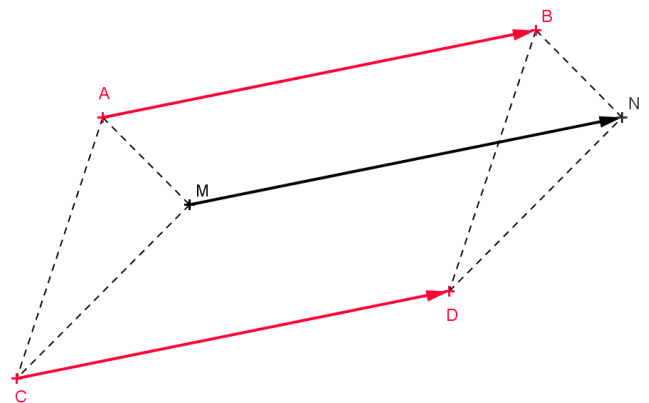
1) Définition

On note D l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Alors à tout point M, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$ associent le même point N.

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{NM}$ sont égaux, ils définissent la même translation.

On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{NM}$



2) Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, le quadrilatère ABDC est un parallélogramme éventuellement aplati.

Exemple

Dans la figure ci-contre
ABED, BCFE, DEJG et EFHI
sont des
parallélogrammes
superposables. Les points
A,B,C sont alignés ainsi
que les points A,D,G.

Alors on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IH}$$

mais aussi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{FH}$$

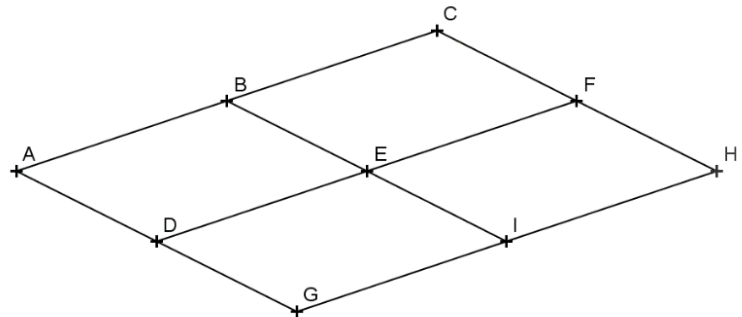
mais encore

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CH} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{GH}$$

et bien d'autres égalités

....



3) Conséquence

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement s'ils possèdent :

- La même **direction** (c'est à dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues)
- Le même **sens**
- La même **longueur** ($AB = CD$)

4) Représentants d'un vecteur

a) Définition

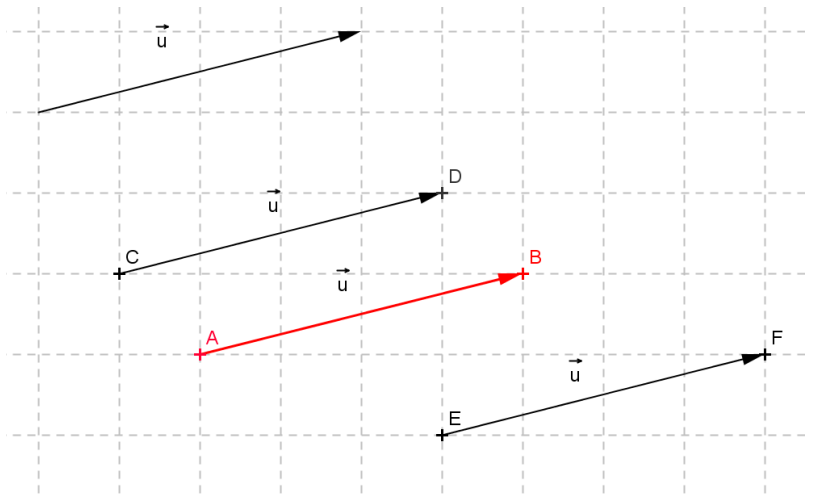
Etant donnés deux points A et B, on dit que le couple (M, N) est un **représentant du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ si ABNM est un parallélogramme.

En d'autres termes : le couple (M, N) est un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$.

Par exemple, le couple de points (A,B) est un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme aussi C en D et E en F donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

On dit que (A,B), (C,D) et (E,F) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants d'un même vecteur.



b) Remarque

On rencontrera dans de nombreux exercices des vecteurs désignés par une seule lettre, $\vec{u}$ par exemple. La possibilité d'utiliser une telle écriture provient du fait que la notion de vecteur est fondamentalement différente de celle de position. En effet, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est indépendants des points A et B en ce sens qu'au lieu des points A et B, on aurait pu, pour définir ce vecteur, utiliser n'importe quels points M et N situés ailleurs dans le plan, avec comme seule contrainte le fait que ABNM soit un parallélogramme.

Exemple

Dans la figure ci-contre ABED, BCFE, DEJG et EFHI sont des parallélogrammes superposables. Les points A,B,C sont alignés ainsi que les points A,D,G.

Alors:

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{GI}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{IH}$ sont des vecteurs égaux au vecteur $\vec{u}$

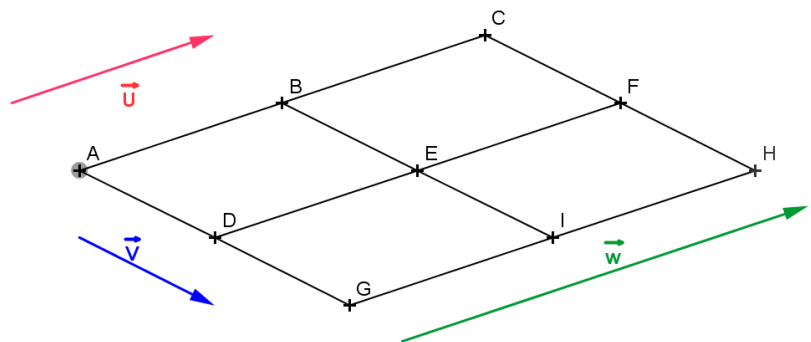
Les couples de points (A, B), (D,E), etc... sont des représentants du vecteur $\vec{u}$

et $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{DG}, \overrightarrow{EI}, \overrightarrow{FH}$ sont des vecteurs égaux au vecteur $\vec{v}$

Les couples de points (A, D), (B, E), (C, F), (D, G), (E, I) et (F, H) sont des représentants du vecteur $\vec{v}$

et aussi :

$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{GH}$ sont des vecteurs égaux au vecteur $\vec{w}$
Les couples de points (A, C), (D, F), (D, G) et (G, H) sont des représentants du vecteur $\vec{w}$



5) Vecteurs particuliers

- Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$ est associé à la translation qui transforme A en A, B en B, C en C,
ainsi $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{CC} = \dots = \vec{0}$
- Le **vecteur opposé** au vecteur $\vec{AB}$ est le vecteur associé à la translation qui transforme B en A, c'est le **vecteur** $\vec{BA}$
 $\vec{AB} = -\vec{BA}$

Exemple :

Dans la figure de l'exemple précédent, les vecteurs $\vec{GH}$ et $\vec{HG}$ sont opposés, ainsi que $\vec{AC}$ et $\vec{CA}$ (on pourrait trouver de nombreux couples de vecteurs opposés).

III) Multiplication d'un vecteur par un réel

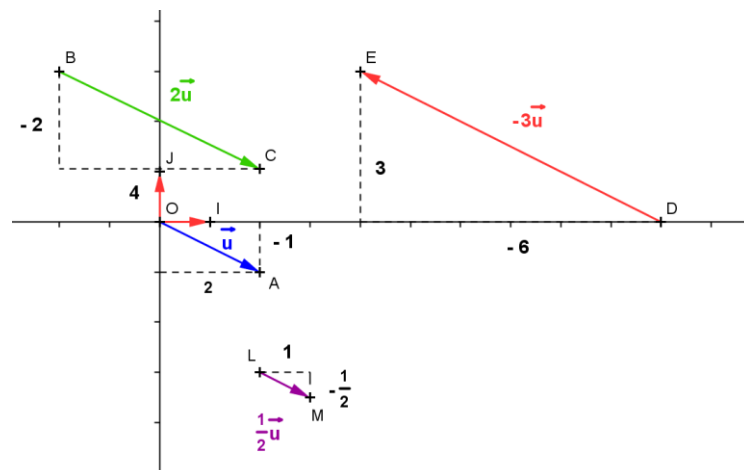
1) Produit d'un vecteur par un réel

a) Définition

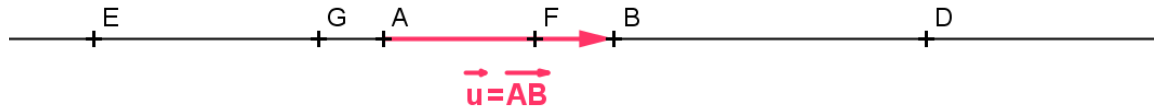
k est un nombre réel :

Si $k > 0$	Si $k < 0$
Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur : • De même direction que le vecteur $\vec{u}$ • De même sens que le vecteur $\vec{u}$ • De longueur k fois la norme du vecteur $\vec{u}$	Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur : • De même direction que le vecteur $\vec{u}$ • De sens opposé au vecteur $\vec{u}$ • De longueur $-k$ fois la norme du vecteur $\vec{u}$

Exemple :



Exemple:



Sur la figure ci-dessus :

Le point F est tel que $\vec{AF} = k\vec{AB}$ avec $0 < k < 1$ et $k = \frac{AF}{AB}$

Le point D est tel que $\vec{AD} = k\vec{AB}$ avec $k > 1$ et $k = \frac{AD}{AB}$

Le point G est tel que $\vec{AG} = k\vec{AB}$ avec $-1 < k < 0$ et $k = -\frac{AG}{AB}$

Le point E est tel que $\vec{AE} = k\vec{AB}$ avec $k < -1$ et $k = -\frac{AE}{AB}$

Remarque : M est le milieu de [AB] si et seulement si $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

2) Propriétés

$k\vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

- Le vecteur $(-1) \times \vec{u}$ est noté $-\vec{u}$

C'est le seul vecteur tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

C'est le vecteur opposé au vecteur $\vec{u}$

En particulier on sait que $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$ donc $\vec{BA} = -\vec{AB}$

- On note $\vec{u} - \vec{v}$ le vecteur $\vec{u} + (-\vec{v})$

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels k et k' on a :

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

$$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$

$$k(k'\vec{u}) = k'(k\vec{u})$$

IV) Somme de vecteurs. Relation de Chasles

1) Somme de vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et M un point.

La translation de vecteur $\vec{u}$ associe au point

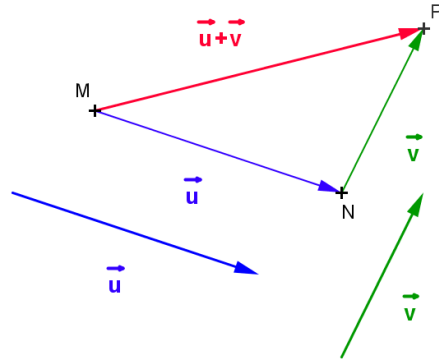
M le point N

La translation de vecteur $\vec{v}$ associe au point

N le point P

La translation qui associe le point M au point

P est appelée : **translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$**



a) Définition

La **somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** est le vecteur associé à la translation résultant de l'**enchaînement** des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.
On note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

b) Propriétés

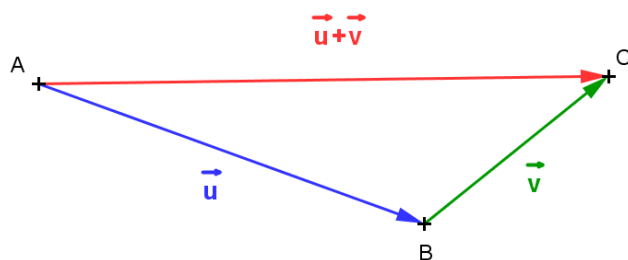
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$:

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

2) Relation de Chasles

a) Propriété

Pour tous points A, B et C, trois points quelconques du plan, on a :
 $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



b) Règle du parallélogramme

On choisit des représentants (A, B) de $\vec{u}$ et (A, C) de $\vec{v}$ de **même origine**. La somme $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AE}$ tel que **ABEC soit un parallélogramme**.

