Fiches Méthodes

Bien lire l'énoncé 2 fois avant de continuer - ▌Méthodes et/ou Explications ▌ Réponses

Fonction inverse et inégalité

Méthode / Explications :

Rappel :

- **Si 0 <a ≤b alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ (c'est à dire $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur]0 ; $+\infty$[**
- **Si a ≤ b < 0, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ (c'est à dire $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur]$-\infty$; 0[**

Pour déterminer le domaine auquel appartient $\frac{1}{x}$ lorsque x est donné, il se présente 2 cas faciles et 2 cas difficiles :

1) cas faciles

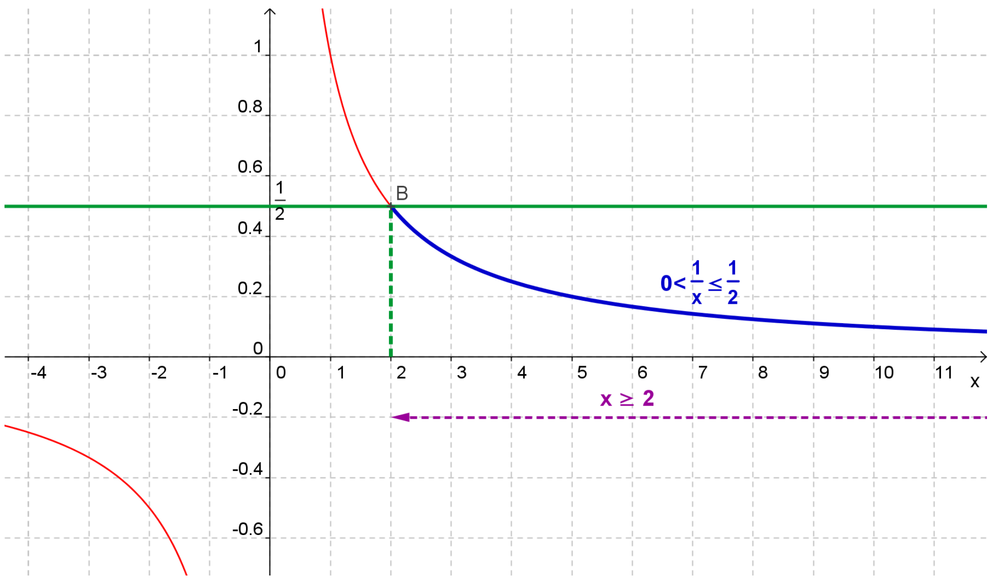
Exercice 1 :. A quel intervalle appartient $\frac{1}{x}$ lorsque $x \geq 2$?

Réponse :

Nous sommes dans le cas où x est positif, f est décroissante sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[, donc :

Pour $x \geq 2$ alors $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$. Mais attention $\frac{1}{x}$ reste positif !!!!

Pour $x \geq 2$ alors $\frac{1}{x} \in$]0 ; $\frac{1}{2}$.]



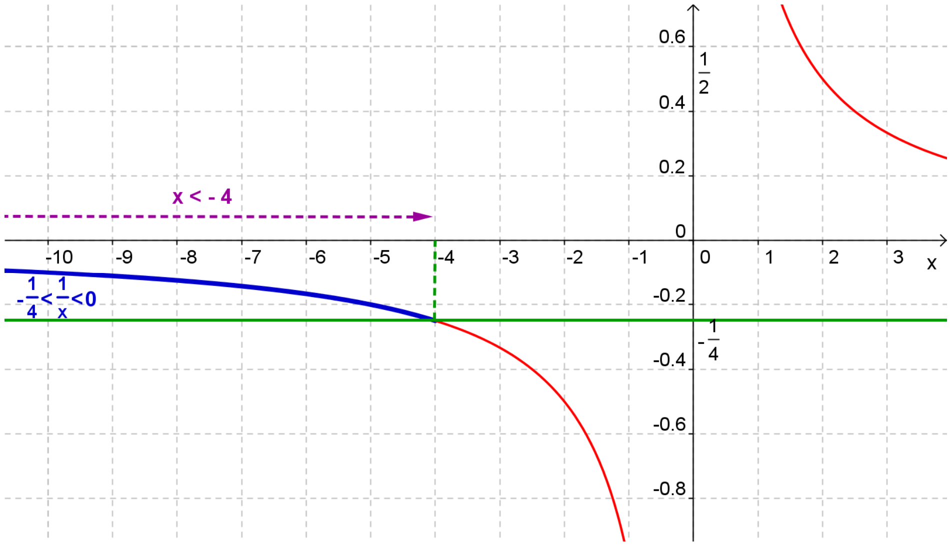
Exercice 2:. A quel intervalle appartient $\frac{1}{x}$ lorsque $x < -4$?

Réponse :

Nous sommes dans le cas où x est négatif, f est décroissante sur l'intervalle] $-\infty$; 0[, donc :

Pour $x < -4$ alors $\frac{1}{x} > -\frac{1}{4}$. Mais attention $\frac{1}{x}$ reste négatif !!!!

Pour $x < -4$ alors $\frac{1}{x} \in]-\frac{1}{4}$; 0[



2) cas difficiles

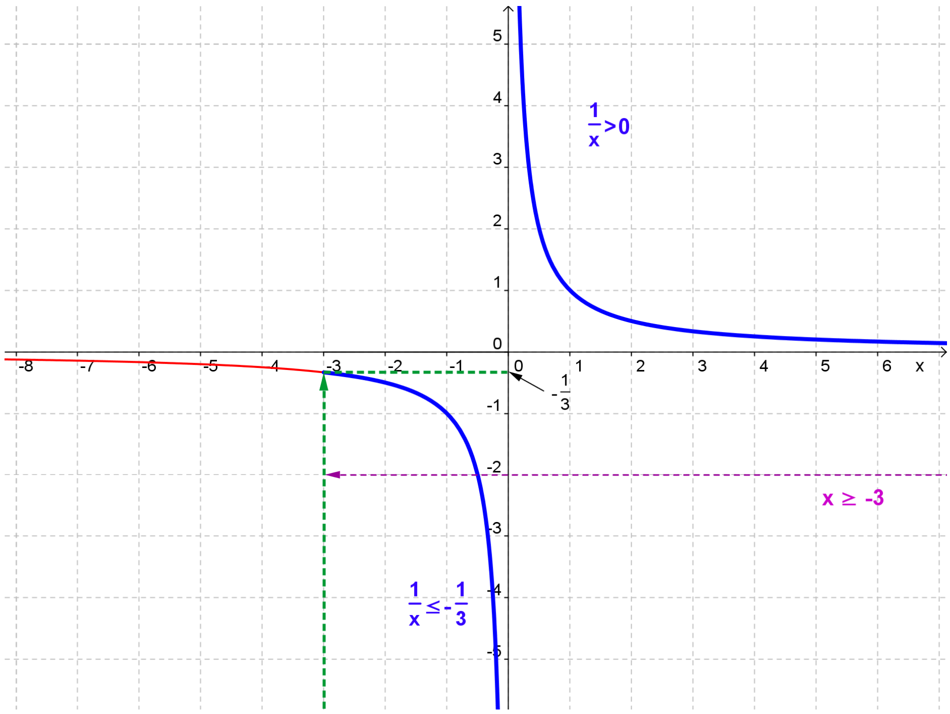
Exercice 3 :.A quel domaine appartient $\frac{1}{x}$ lorsque $x \geq -3$?

Réponse :

Nous ne pouvons pas directement conclure car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ mais sur $]-\infty$; 0[et sur]0 ; $+\infty$[!! Ce qui n'est absolument pas la même chose !! Il faut donc séparer le cas où x est positif et celui où x est négatif !!

- **Lorsque $x > 0$ alors $\frac{1}{x} \in]0 ; +\infty [$**
- **Lorsque $x < 0$: Comme $x \geq -3$ alors $\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{3}$ (La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty ; 0 [$)**

Pour $x \geq -3$ alors $\frac{1}{x} \in] -\infty ; -\frac{1}{3}] \cup] 0 ; +\infty [$



Exercice 4 :.A quel domaine appartient $\frac{1}{x}$ lorsque $x < 2$?

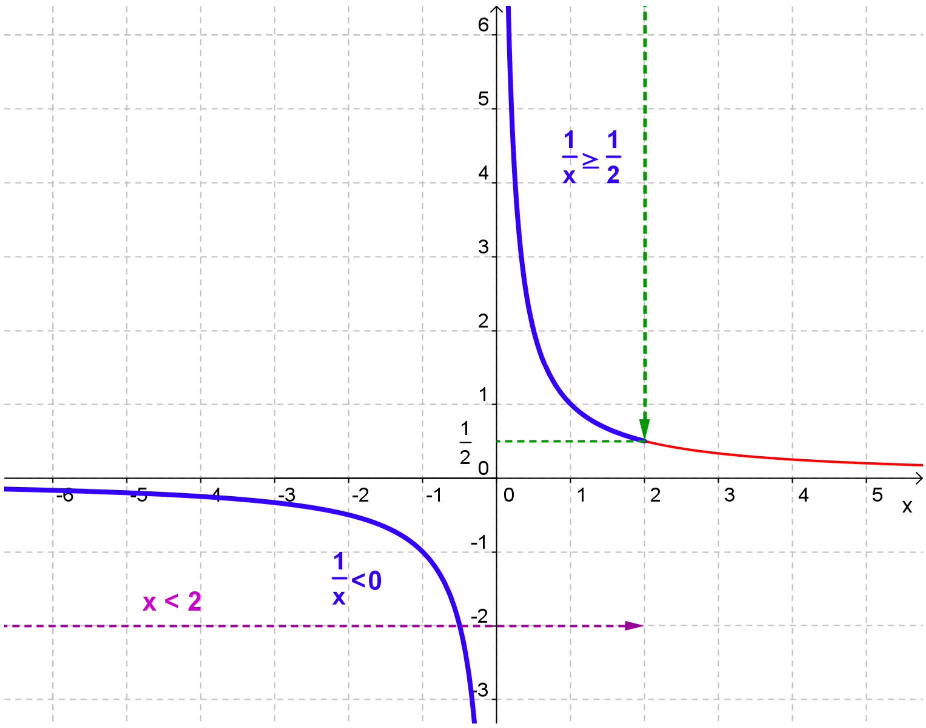
Réponse :

Nous ne pouvons pas directement conclure car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ mais sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$!! Ce qui n'est absolument pas la même chose !! Il faut donc séparer le cas où x est positif et celui où x est négatif !!

• Lorsque $x > 0$: Comme $x < 2$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$ (La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$)

• Lorsque $x < 0$: alors $\frac{1}{x} \in]-\infty\,;0[$)

Pour $x < 2$ alors $\frac{1}{x} \in]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]\frac{1}{2}\ ;+\infty[$



3) Exercices supplémentaires

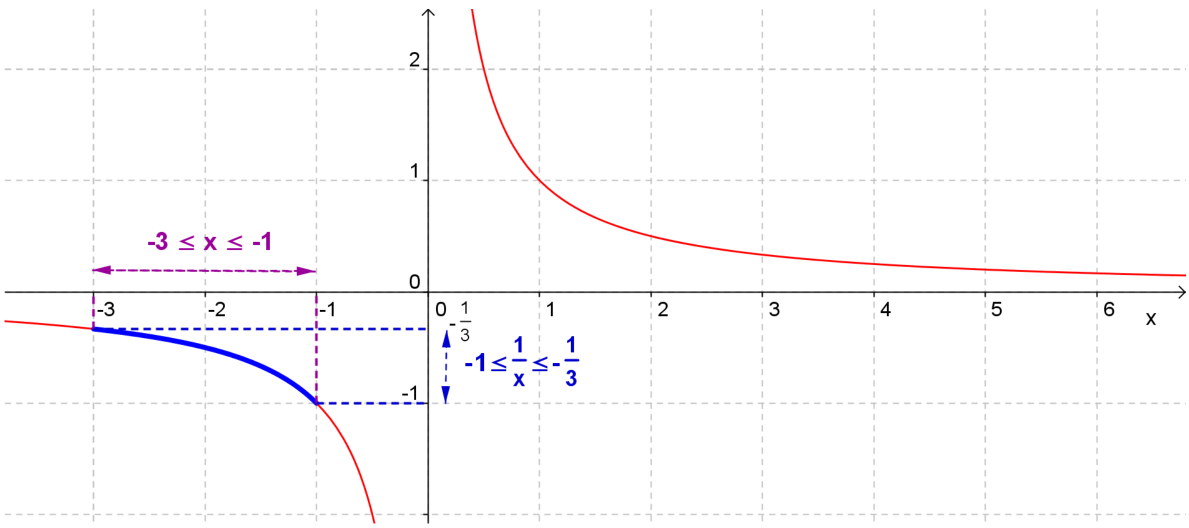
Exercice 5 :.Sachant que -3 < x ≤ -1 encadrer $\frac{1}{x}$

Réponse : Nous sommes dans le cas où x reste négatif.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est donc décroissante pour x < 0.

On obtient donc : - $\frac{1}{3}$ > $\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{1}$, c'est-à-dire : - $\frac{1}{3}$ > $\frac{1}{x}$ ≥ -1

Lorsque: -3 < x ≤ -1 alors $\frac{1}{x}$ ∈ [-1 ; - $\frac{1}{3}$ [

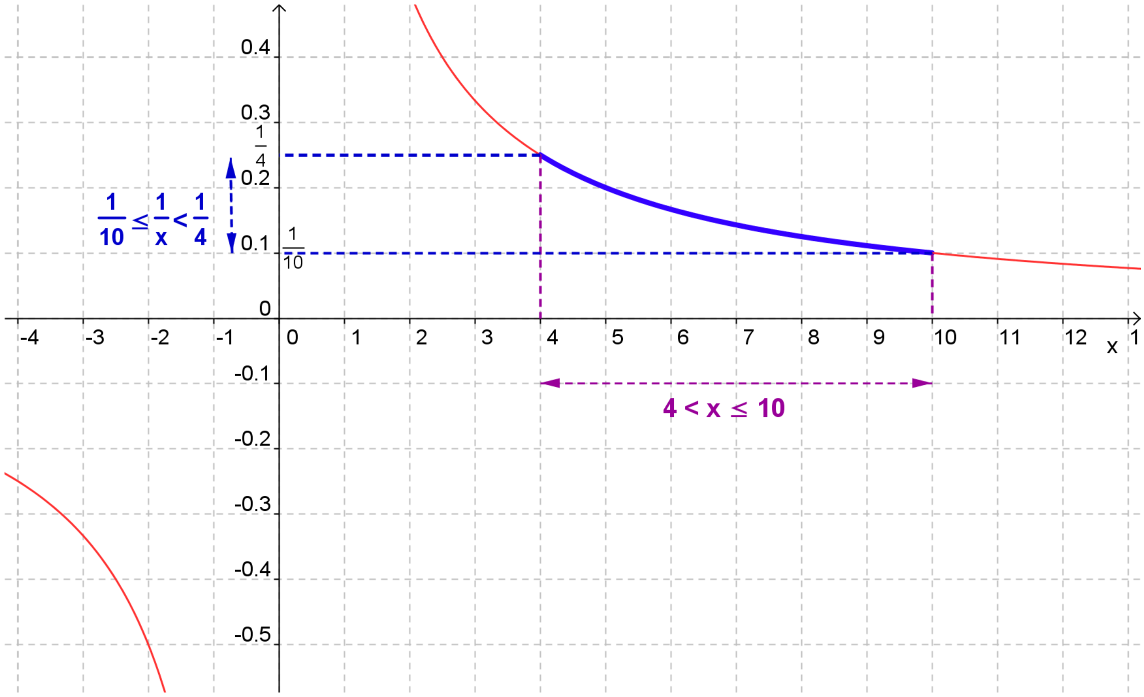


Exercice 6 :. $4 < x \leq 10$ encadrer $\frac{1}{x}$

Réponse : Nous sommes dans le cas où x reste positif. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est donc décroissante pour x > 0.

On obtient donc : $\frac{1}{4} > \frac{1}{x} \geq \frac{1}{10}$

Lorsque: 4 < $x \leq$ 10 alors $\frac{1}{x} \in [\frac{1}{10} ; \frac{1}{4}[$



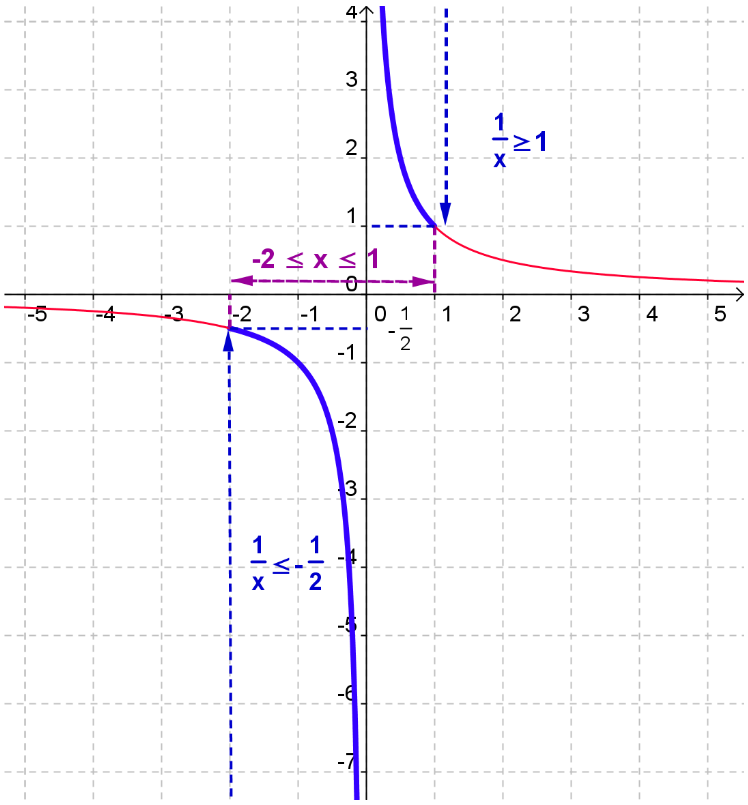
Exercice 7:. A quel ensemble appartient $\frac{1}{x}$ lorsque $-2 \leq x \leq 1$?

Réponse :

Nous ne pouvons pas directement conclure car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ mais sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$!!

Ce qui n'est absolument pas la même chose !!

Méthode 1 : Nous allons répondre à cette question par lecture graphique :



Solution :

$\frac{1}{x} \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right] \cup [1\ ;\ +\infty[$

Méthode 2 (assez difficile) : Nous ne pouvons pas directement conclure car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ mais sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$!! Ce qui n'est absolument pas la même chose !! Il faut donc séparer le cas où x est positif et celui où x est négatif !!

Cet encadrement équivaut à :

$$\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ \text{et} \\ -2 \leq x < 0 \end{cases} \qquad \textbf{Ce qui équivaut à :} \qquad \begin{cases} \frac{1}{x} \geq 1 \\ \text{et} \\ -\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x} \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $\frac{1}{x} \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right] \cup [1\ ;\ +\infty[$