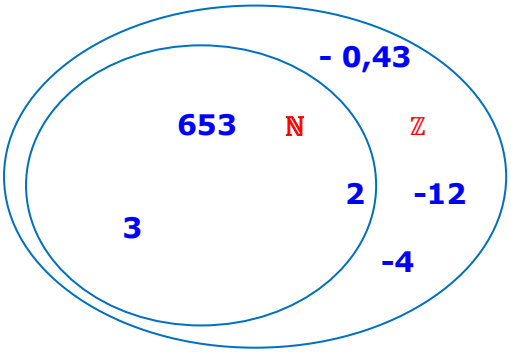
Nombres entiers. Multiples, diviseurs. Nombres premiers.

I) Définition

- **Les entiers naturels sont les nombres entiers : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 …….**
  L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.
  - **$\mathbb{N}$ = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; …}**

- **L'ensemble des entiers relatifs est à la fois formé des entiers naturels mais aussi de leurs opposés. C'est l'ensemble des nombres entiers positifs et négatifs.**
  L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.
  - **$\mathbb{Z}$ = {…. ; -4 ; - 3 ; - 2 ; - 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; …}**

- **Par conséquent les entiers naturels sont des entiers relatifs.**
  Relation entre ces ensembles : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$



II) Multiples et diviseurs.

1) Définition

a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que $a = kb$.

On dit que :

- **a est un multiple de b.**
- **b est un diviseur de a.**

Exemples

8 est multiple de 4
4 est un diviseur de 8

En effet : $8 = 4 \times 2$

217 est un multiple de 7
7 est un diviseur de 217

En effet : $217 = 7 \times 31$

Exemple de problèmes :

Prouver que la somme de trois nombres entiers naturels consécutifs est un multiple de 3**.**

Solution : Soit n le plus petit des 3 nombres, $n+1$ est le suivant et $(n+1)+1 = n+2$ est le troisième, la somme des trois entiers consécutifs est donc : $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3$

$3n + 3 = 3(n+1)$ est bien un multiple de 3

2) Propriété

La somme de deux multiples d'un entier a est aussi un multiple de a

Exemples :

Exemple 1 : 14 + 21 = 35 **;** 14 et 21 sont deux multiples de 7 alors 35 l'est aussi.

Exemple 2 : 18+12 = 30, 18 et 12 sont deux multiples de 6 ; 30 l'est aussi.

Démonstration :

Démonstration 1 : Prenons le cas où nous prenons deux multiples d'un nombre donné **11**.
Les deux multiples de 11 s'écrivent sous la forme : $11p$ et $11q$; p et q étant deux nombres entiers.
Leur somme est donc : $11p + 11q = 11(p+q)$ en factorisant par 11 ce qui donne bien aussi un multiple de 11.

Démonstration 2 : Cas général (pour ceux qui veulent aller plus loin) :

Soit deux nombres entiers multiples d'un nombre a donné. On peut les écrire sous la forme : ap et aq avec p et q entiers. Leur somme est donc $ap+aq = a(p+q)$, $p+q$ étant entier, $a(p+q)$ est bien aussi un multiple de a .

La somme de deux multiples d'un nombre donné a est aussi un multiple de ce nombre a.

III) Nombres pairs et impairs

1) Définitions

- **Un nombre pair est un nombre entier multiple de 2.**
  Tout nombre pair peut s'écrire sous la forme $2k$ avec k entier.

- **Un nombre impair est un nombre entier qui n'est pas un multiple de 2.**
  Tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $2k+1$ avec k entier.

2) Propriétés

- **Le carré d'un nombre pair est toujours pair.**
- **Le carré d'un nombre impair est toujours impair.**

Démonstration 1 : Le carré d'un nombre pair est pair :

Soit n un nombre pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$

Le carré de ce nombre est : $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = \mathbf{2k'}$ $avec\ k' = 2k^2$, k' étant lui aussi entier, $\mathbf{n^2 = 2k'}$ **avec k' entier donc n^2 est aussi un nombre pair.**

Donc le carré d'un nombre pair est bien un nombre pair.

Réciproquement : montrons que si un nombre au carré est pair alors ce nombre est pair.

Raisonnons par l'absurde soit p^2 un nombre pair et supposons que p soit impair alors il existe un nombre k tel que $p = 2k+1$ donc $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ qui est l'écriture d'un nombre impair , ce qui contredit l'hypothèse de départ donc **si p^2 est pair , p l'est aussi**

Démonstration 2 : Le carré d'un nombre impair est impair :

Soit n un nombre impair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$

Le carré de ce nombre est :

$n^2 = (2k+1)^2 = (2k+1)(2k+1) = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1 \; avec \; k' = 2k^2 + 2k$, k' étant lui aussi entier,
$\boldsymbol{n^2 = 2k' + 1}$ **avec** $\boldsymbol{k'}$ **entier donc n² est aussi un nombre impair.**

Donc le carré d'un nombre impair est bien un nombre impair.

Réciproquement : montrons que si un nombre au carré est impair alors ce nombre est impair.

Raisonnons par l'absurde soit p^2 un nombre impair et supposons que p soit pair alors il existe un nombre k tel que $p = 2k$donc $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$ qui est l'écriture d'un nombre pair , ce qui contredit l'hypothèse de départ donc **si $\boldsymbol{p^2}$ est impair , $\boldsymbol{p}$ l'est aussi**

IV) Nombres premiers

1) Définition

Un nombre premier est un nombre entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts dans $\mathbb{N}$: 1 et lui-même.

Remarques :

- **0 n'est pas un nombre premier** : Il possède une infinité de diviseurs dans $\mathbb{N}$: 1 ;2 ;3 ;4…: $\mathbb{N}$ lui-même.
- **1 n'est pas un nombre premier** : il n'a qu'un seul diviseur dans $\mathbb{N}$: lui-même.

Exemples :

3 est un nombre premier. Ses seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 et 3.
5 est un nombre premier. Ses seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 et 5.
4 n'est pas un nombre premier : ses diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 ; 2 et 4.

2) Cribles d'Eratosthène

Il existe une infinité de nombres premiers.
Le crible d'Eratosthène est un algorithme qui permet de trouver les nombres premiers selon une technique bien précise :
- **On barre le chiffre 1 puisqu'il n'est pas premier.**
- **2 n'est pas barré, on l'entoure et on barre tous les multiples de 2 (sauf 2)**
- **3 n'est pas barré, on l'entoure et on barre tous les multiples de 3 (sauf 3)**
- **Le nombre suivant non barré est 5. On l'entoure et on barre tous ses multiples (sauf 5) et on continue ainsi de suite ….**

Remarques : On obtient la liste de tous les nombres premiers (les nombres qui ne sont pas barrés (voir le tableau ci-dessous avec les nombres inférieurs ou égales à 100) :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 et 97. Cette liste n'est pas à apprendre par cœur il suffit juste de savoir retrouver les nombres premiers.

3) Propriété

Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 est soit un nombre premier soit il se décompose en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est unique.

Exemples :

- Décomposer 72 en produit de facteurs premiers : $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

- Décomposer 132 en produit de facteurs premiers : $132 = 2 \times 2 \times 3 \times 11 = 2^2 \times 3 \times 11$

- Quel est le nombre entier naturel compris entre 900 et 1 000 divisible par 7 ; 5 et 13 ?

Solution : D'après l'énoncé, le nombre cherché est divisible par 7 ; 5 et 13 qui sont premiers, donc la décomposition en produit de facteurs premiers comprend les nombres 7 ; 5 et 13. Donc le nombre cherché est divisible par $7 \times 5 \times 13$. Or, $7 \times 5 \times 13 = 455$ donc le nombre cherché est un multiple de 455.

455 ; 910 ; 1365 sont des multiples de 455. 910 est celui qui est compris entre 900 et 1 000.

Donc **910 est le nombre cherché** divisible par 7 ;5 et 13 et compris entre 900 et 1 000.