

Racines carrées. Valeurs absolues.

I) Les racines carrées

1) Définition

Soit a un nombre **positif**, le nombre positif dont le carré est égal à a , s'appelle **la racine carrée** de ce nombre a . Elle se note $\sqrt{a}$.

Pour tout nombre positif a : $(\sqrt{a})^2 = a$
Le symbole $\sqrt{\quad}$ se nomme radical.

Exemples :

$$(\sqrt{3})^2 = 3 ; (\sqrt{1\,000})^2 = 1\,000$$

Attention !!! L'écriture $\sqrt{a}$ n'a pas de sens si a est un nombre négatif il n'existe pas de nombre (dans les réels) dont le carré soit négatif.
 $\sqrt{-10}$ n'existe pas !

Attention !!! Il ne faut pas confondre $\sqrt{-7^2}$ et $\sqrt{(-7)^2}$.

En effet $\sqrt{-7^2}$ n'existe pas car $-7^2 = -49$ c'est un nombre négatif alors que $(-7)^2 = 49$, par conséquent $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$.

2) Multiplications et divisions de racines carrées

a) Propriétés

Quels que soient les nombres a et b **positifs**,

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Quels que soient les nombres a et b **positifs**, et $b \neq 0$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples :

$$\sqrt{6} \times \sqrt{24} = \sqrt{6 \times 24} = \sqrt{144} = 12$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{60}} = \sqrt{\frac{45}{60}} = \sqrt{\frac{3 \times 3 \times 5}{5 \times 3 \times 4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

b) Démonstration

Nous allons démontrer que quels que soient les nombres a et b positifs : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$ par définition de la racine carrée.

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$$

Donc $\sqrt{a \times b}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ sont **deux nombres positifs** dont leurs carrés sont égaux, ils sont donc égaux. Par conséquent $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

c) Méthode pour simplifier un radical :

L'objectif est d'écrire le radical d'un nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible.

Pour cela on utilise la propriété : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ainsi que les carrés parfaits : (4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144 ; 169 etc ...)

Exemples :

Exemple 1 : Simplifier le radical $\sqrt{27}$

Réponse : $27 = 9 \times 3$ 9 est un carré parfait donc :

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Exemple 2 : Simplifier le radical $\sqrt{72}$

Réponse : $72 = 36 \times 2$ 36 est un carré parfait donc :

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

d) Simplifier une racine carrée au dénominateur :

Pour éviter qu'apparaissent des racines carrées au dénominateur d'un quotient on transforme celui-ci afin de simplifier les calculs.

Méthode :

- Si nous avons une expression de la forme $\frac{a}{\sqrt{b}}$ il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{b}$.
- Si nous avons une expression de la forme $\frac{a}{b+c\sqrt{d}}$, nous allons utiliser la **forme conjuguée** de $b+c\sqrt{d}$ qui est : $b-c\sqrt{d}$ et multiplier le numérateur et le dénominateur par cette forme conjuguée. En utilisant la 3^{ème} identité remarquable le dénominateur sera simplifié en un nombre entier ;

Exemples :

Exemple 1 : $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

Exemple 2 : $\frac{5}{7+\sqrt{3}}$

Le dénominateur est $7 + \sqrt{3}$, sa forme conjuguée est $7 - \sqrt{3}$, on va multiplier le numérateur et le dénominateur par $7 - \sqrt{3}$,

$\frac{5}{7+\sqrt{3}} = \frac{5 \times (7-\sqrt{3})}{(7+\sqrt{3}) \times (7-\sqrt{3})}$ On utilise la 3^{ème} identité remarquable au dénominateur $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$\frac{5}{7+\sqrt{3}} = \frac{35-5\sqrt{3}}{7^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{35-5\sqrt{3}}{49-3} = \frac{35-5\sqrt{3}}{46}$

3) Propriété sur les additions de racines carrées

a) Propriété

Pour tout nombre a et b strictement positif $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

La démonstration sera expliquée dans le chapitre fonction carré.

Exemples :

$\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$ et $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ et $10 < 14$:

Attention il en résulte que : $\sqrt{36} + \sqrt{64} \neq \sqrt{36 + 64}$

Méthode :

L'objectif est d'écrire le radical d'un nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible.

Pour cela on utilise la propriété : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ainsi que les carrés parfaits : (4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144 ; 169 etc ...)

Exemples :

Exemple 1 : Simplifier le radical $\sqrt{27}$

Réponse : $27 = 9 \times 3$ 9 est un carré parfait donc :

$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

Exemple 2 : Simplifier le radical $\sqrt{72}$

Réponse : $72 = 36 \times 2$ 36 est un carré parfait donc :

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

b) Comment réduire une somme ayant des racines carrées

Il n'existe pas de formule concernant la somme de racines carrées, mais nous pouvons calculer certaines sommes algébriques en simplifiant les racines carrées.

Exemple 1 : Ecrire le nombre suivant sous la forme $a\sqrt{b}$

$$A = 7\sqrt{5} + 9\sqrt{5} = (7 + 9)\sqrt{5} = 16\sqrt{5}$$

Exemple 2 : Ecrire le nombre suivant sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers, b étant le plus petit possible.

$$B = 2\sqrt{147} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{27}$$

$$B = 2\sqrt{49 \times 3} + 5\sqrt{4 \times 3} - 3\sqrt{9 \times 3}$$

$$B = 2\sqrt{49} \times \sqrt{3} + 5\sqrt{4} \times \sqrt{3} - 3\sqrt{9} \times \sqrt{3}$$

$$B = 2 \times 7 \times \sqrt{3} + 5 \times 2\sqrt{3} - 3 \times 3 \times \sqrt{3}$$

$$B = 14\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 9\sqrt{3}$$

$$B = (14+10-9)\sqrt{3}$$

$$B = 15\sqrt{3}$$

II) Valeur absolue. Distance entre deux nombres réels

1) Valeur absolue d'un nombre réel

a) Définition

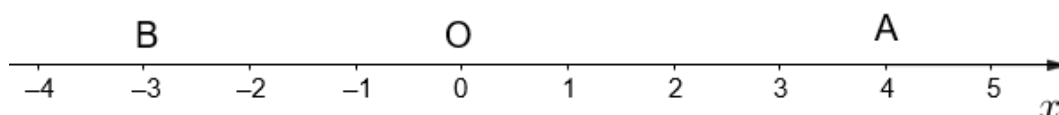
x est un nombre réel de la droite numérique d'origine O , abscisse du point M :

La valeur absolue d'un nombre réel x est la distance de ce réel à 0 sur la droite numérique.

$|x| = OM$.

La notation $|x|$ se lit « valeur absolue de x »

Exemples :



$$|-3| = 3 \quad OB = 3$$

$$|4| = 4 \quad OA = 4$$

Conséquence :

Pour tout nombre réel x , $|x| \geq 0$. Une distance étant toujours positive.

$$|0| = 0$$

b) Propriétés

Pour tout nombre réel x :

Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$

Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$ et

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Exemples :

$$(-3)^2 \text{ est positif.} \quad \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3 \text{ et } \sqrt{7^2} = |7| = 7$$

c) Distance de deux réels

La distance de deux nombres réels a et b est la distance des points A et B d'abscisses respectives a et b sur la droite numérique.

On la note $|a - b|$

$$|a - b| = AB$$

Remarque : $|a - b| = |b - a|$

Exemples :

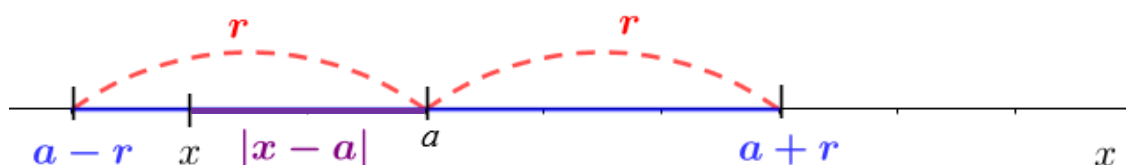
La distance de 2 à 8 est 6 : $|2 - 8| = |-6| = 6$

La distance de 7 à -3 est 10 : $|7 - (-3)| = |10| = 10$

d) Propriété

Soit a un nombre réel et r un nombre réel positif,

$x \in [a - r ; a + r]$ équivaut à $|x - a| \leq r$



e) valeur approchée et encadrement d'un nombre réel

Définitions :

• Pour tous nombres a, x réels et n entier naturel, le nombre a est une valeur approchée de x à 10^{-n} près si :

$|x - a| \leq 10^{-n}$ qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$a - 10^{-n} \leq x \leq a + 10^{-n}$$

• $0 \leq x \leq a + 10^{-n}$ est un encadrement décimal de x d'amplitude 10^{-n} ($a \in \mathbb{D}$ et $x \in \mathbb{R}$)

Exemple : Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $\sqrt{188}$

A la calculatrice $\sqrt{188} \approx 13,71131$

Un encadrement d'amplitude 10^{-2} est : $13,71 < \sqrt{188} < 13,72$

En effet $|\sqrt{188} - 13,71| < 10^{-2}$ et $|\sqrt{188} - 13,72| < 10^{-2}$