

Calcul littéral. Equations

I) Développer une expression littérale

1) définition :

Développer une expression c'est transformer cette expression en somme algébrique.

On utilise pour cela les formules de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

2) Propriétés

Pour tout nombre réel $a ; b ; c$ et d

Distributivité simple	double distributivité	Identités remarquables
$k(a+b) = ka + kb$ $k(a-b) = ka - kb$	$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Exemples :

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$$A = 7(x-3) = 7x - 7 \times 3 = 7x - 21$$

$$B = 4(8x-5) = 4 \times 8x - 4 \times 5 = 32x - 20$$

$$C = (3x-5)(2x+4)$$

$$C = 3x \times 2x + 3x \times 4 - 5 \times 2x - 5 \times 4$$

$$C = 6x^2 + 12x - 10x - 20$$

$$\mathbf{C = 6x^2 + 2x - 20}$$

$$D = (x+1)^2 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$$

(1^{ère} identité remarquable avec $a = 1$ et $b = 1$)

$$E = (x-3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

(2^{ème} identité remarquable avec $a = 1$ et $b = 3$)

$$F = (x-7)(x+7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$$

(3^{ème} identité remarquable avec $a = 1$ et $b = 7$)

$$G = (3x+1)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

(1^{ère} identité remarquable avec $a = 3$ et $b = 1$)

$$H = (7x-4)^2 = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 4 + 4^2 = 49x^2 - 56x + 16$$

(2^{ème} identité remarquable avec $a = 7$ et $b = 4$)

$$I = (3x-5)(3x+5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$$

(3^{ème} identité remarquable avec $a = 3$ et $b = 5$)

II) Factoriser une expression littérale

1) Définition :

Factoriser une somme ou une différence revient à transformer cette somme ou cette différence en un produit

2) Propriétés

Pour tout nombre réel $a ; b ; c$ et d

Distributivité simple	Identités remarquables
$ka + kb = k(a + b)$ $ka - kb = k(a - b)$	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Exemples : Factoriser les expressions suivantes :

• $A = 16x + 5x$

On utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$A = 16x + 5x = x(16 + 5) = 21x$$

$$A = 21x$$

• $B = 21x - 14$

On utilise la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction :
(on remarque que 21 et 14 sont deux multiples de 7)

$$B = 21x - 14 = 7 \times 3x - 7 \times 2 = 7(3x - 2)$$

$$B = 7(3x - 2)$$

• $C = (2x - 9)^2 + (2x - 9)(2x - 8) =$
 $C = (2x - 9)(2x - 9) + (2x - 9)(2x - 8)$

On remarque que $2x - 9$
est le facteur commun

$$C = (2x - 9)[(2x - 9) + (2x - 8)] =$$
$$C = (2x - 9)(2x - 9 + 2x - 8) =$$

On réduit le deuxième acteur

$$C = (2x - 9)(4x - 17)$$

On remarque que $5x + 2$
est le facteur commun

III) Equations

1) Définition

Résoudre une équation dont l'inconnue est le nombre x c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre x qui vérifient l'égalité.
Chaque valeur de x est une solution de cette équation.

2) Equations équivalentes

Deux équations sont équivalentes si elles ont les mêmes solutions.

3) Résolution d'équations

a) Rappel : Equation du type : $ax + b = cx + d$

Exemple : Résoudre l'équation $6x + 8 = 4x - 15$

$$6x + 8 = 4x - 15$$

si et seulement si : $\underbrace{6x - 4x} + 8 = 4x - 4x - 15$

si et seulement si : $2x + 8 = 0 - 15$

si et seulement si : $2x + 8 - 8 = -15 - 8$

si et seulement si : $2x = -23$

si et seulement si : $\frac{2x}{2} = -\frac{23}{2}$

si et seulement si : $x = -\frac{23}{2} = -11,5$

La solution de l'équation :

$6x + 8 = 4x - 15$ est $-11,5$

$S = \{-11,5\}$

1) On regroupe du même côté de l'égalité les termes en x (en général à gauche du signe $=$). Pour cela on soustrait $4x$ aux deux membres de l'égalité

2) On réduit l'expression

3) On regroupe les nombres constants de l'autre côté de l'égalité. Pour cela on soustrait 8 aux deux membres de l'égalité

4) On réduit l'expression

5) On divise par 2 les deux membres de l'égalité, pour isoler le nombre x

6) On simplifie

7) On n'oublie pas de conclure.

b) Propriétés

- $A(x) \times B(x) = 0$ si et seulement si : $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$
- $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ si et seulement $A(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$
- Pour tout réel $a > 0$ l'équation $x^2 = a$ est équivalente à : $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$
- Pour tout réel $a < 0$ l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Exemples :

Exemple 1 : Résoudre l'équation $(9x - 7)(5x + 9) = 0$

$(9x - 7)(5x + 9) = 0$ si et seulement si :

$9x - 7 = 0$ ou $5x + 9 = 0$ si et seulement si :

$9x = 7$ ou $5x = -9$ si et seulement si :

$$x = \frac{7}{9} \text{ ou } x = -\frac{9}{5} \quad \mathbf{S} = \left\{ \frac{7}{9} ; -\frac{9}{5} \right\}$$

Exemple 2 : Résoudre l'équation $x^2 = 9$

$x^2 = 9$ si et seulement si $x = \sqrt{9} = 3$ ou $x = -\sqrt{9} = -3$

$$\mathbf{S} = \{ 3 ; -3 \}$$

Exemple 3 : Résoudre l'équation : $\frac{2x+3}{x-2} = 0$

$x - 2 = 0$ pour $x = 2$

Donc **pour tout** $x \neq 2$ $\frac{2x+3}{x-2} = 0$ si et seulement si $2x + 3 = 0$ si et seulement si $x = -\frac{3}{2}$

Cette équation a une solution $-\frac{3}{2}$.

$$\mathbf{S} = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

c) Méthode pour résoudre une équation de degré 2 (cas particulier)

En classe de seconde, pour résoudre une équation de degré 2, on commence par tester si on peut la factoriser afin de se ramener à une équation produit nul :

- En repérant, s'il y en a, un facteur commun ou
- en utilisant une identité remarquable ou
- en combinant les deux méthodes précédentes

Dans d'autres cas il est préférable de développer .